Zweites Kapitel

Annehmlichkeit und Prinzipien der Harmonie

§. 1. Weil ich beschlossen habe in diesem Kapitel zu untersuchen, wie bewirkt wird dass von dem was auf die Sinne einströmt das eine uns gefällt und anderes uns missfällt, halte ich es zunächst für nicht in hohem Maße notwendig zu zeigen, dass es überhaupt eine Begründung gibt für das was gefällt oder missfällt und dass unser Bewusstsein nicht zufällig erfreut wird.
Da nämlich in der heutigen Zeit von den meisten gleichsam als Axiom zugelassen wird dass nichts auf der Welt ohne ausreichende Begründung geschehe, wird auch daran nicht zu zweifeln sein, dass es eine Begründung gibt dessen was gefällt.
Wenn man das also zugibt, hat auch die Ansicht derer keinen Bestand, die meinen dass die Musik allein vom Gutdünken der Menschen abhänge und dass unsere eigene Musik uns allein aus der Gewohnheit gefalle und die fremde, weil sie uns ungewohnt ist, missfalle.

§. 2. Freilich leugne ich nicht – und unten werde ich es selbst begründen – dass es durch Übung und eifriges Hören geschehen kann, dass irgendein Zusammenklang uns zu gefallen beginnt der uns zuerst missfallen hat, und umgekehrt.
Dennoch wird dadurch das Prinzip der hinreichenden Begründung („Ratio“), wie sie genannt wird, nicht zerstört: denn die Begründung, warum etwas gefällt oder missfällt, muss nicht nur in der Sache selbst gesucht werden, sondern man muss auch auf die Sinne blicken, durch die das Abbild der Sache dem Bewusstsein dargeboten wird; und außerdem besonders auf das Urteil, das sich das Bewusstsein über das dargebotene Abbild formt.
Weil diese Dinge in verschiedenen Menschen auf verschiedene Art eintreten können und beim selben Menschen auch zu unterschiedlichen Zeiten, ist es nicht verwunderlich, dass dieselbe Sache den einen gefällt, anderen aber missfällt.

§. 3. Aber ich sehe bereits, welches Argument daraus gegen uns und unsere Arbeit abgeleitet wird: Sicherlich wird eingewendet werden, dass man gar keine Prinzipien und Regeln der Harmonie lehren könne und dass aus diesem Grund unsere Arbeit und die aller derer, die versucht haben die Musik in Gesetze zu fassen, vergeblich und wertlos sei. Wenn nämlich verschiedene Menschen Verschiedenes erfreut, und wenn das was erfreut selbst unterschiedlich und geradezu gegensätzlich ist, wie kann man dann Vorschriften für das Verbinden von Tönen erklären, damit sie dem Gehör wohlklingende Harmonie darbieten?

Und wenn man Regeln findet, werden sie entweder zu allgemeingültig sein, sodass sie keinen Nutzen haben können, oder sie werden nicht stabil und beständig sein, sondern an die Überlegung der Zuhörenden angepasst werden müssen; das würde nicht nur unbegrenzte Arbeit erfordern, sondern aus der Musik alle Sicherheit wegnehmen.

§. 4. Aber es ist notwendig, dass ein Musiker sich wie ein Architekt verhält, der – ohne sich um die widersinnigen Urteile der meisten Menschen über Gebäude zu kümmern – nach den sicheren und in der Natur selbst grundgelegten Gesetzen Gebäude entwirft; und wenn diese den solcher Dinge Unkundigen nicht gefallen sollten, ist er dennoch zufrieden wenn sie von den Verständigen gutgeheißen werden. Denn wie in der Musik ist auch in der Architektur der Geschmack der verschiedenen Gruppen so verschieden, dass die einen zurückweisen was den anderen gefällt.
Deswegen muss man wie in allen anderen Dingen genauso in der Musik denen am ehesten folgen, deren Geschmack vollendet und deren Urteil über die sinnlichen Wahrnehmungen von jedem Fehler frei ist. Das sind solche Menschen, die nicht nur von Natur aus ein scharfes und reines Gehör erhalten haben, sondern die auch alles was man im Hörorgan erfährt genau wahrnehmen, und die durch gegenseitigen Austausch dazu ein untadeliges Urteil darüber erhalten.

§. 5. Weil aller Klang, wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, nichts anderes ist als eine bestimmte Reihe von Stößen die in der Luft erzeugt werden und die einander folgen, werden wir einen Klang deutlich wahrnehmen, wenn wir alle Stöße spüren, die auf die Organe der Ohren treffen, und ihre Ordnung erkennen; und außerdem – wenn nicht alle Stöße gleich stark sind – wenn wir auch das Verhältnis der Stärke der einzelnen erkennen.
Um aber so zu einem Urteil über musikalische Fragen zu gelangen, braucht man Hörende, die mit einem scharfen und alle Einzelheiten erkennenden Hörsinn ausgestattet sind und die eine so hohe Stufe des Verstehens besitzen, dass sie die Ordnung, in der die Stöße der Luftteilchen die Hörorgane erschüttern, wahrnehmen und über sie urteilen können. Denn das ist, wie im Folgenden erklärt werden wird, notwendig um zu erkennen, ob in einem vorgelegten musikalischen Werk tatsächlich Annehmlichkeit enthalten ist und welchen Grad diese besitzt.

§. 6. Deshalb werden wir zuallererst Arbeit aufwenden, um bei allen Dingen zu definieren, was der Grund ist warum sie uns entweder gefallen oder missfallen, und was alle Dinge besitzen müssen damit wir von ihnen erfreut werden. Wenn man das nämlich durchblickt, werden daraus eine wahrhafte Richtschnur und Regeln für die Komposition von musikalischen Zusammenklängen

abgeleitet werden können; weil nämlich festgehalten sein wird, worin das begründet ist was gefällt oder missfällt.
Aber aus dieser Quelle kann nicht nur das was die Musik betrifft abgeleitet werden, sondern auch alles andere, was dasselbe erklärte Ziel hat zu gefallen. Und das geht so weit, dass kaum etwas bestimmt werden kann, dem nicht ein größerer Grad an Annehmlichkeit aus diesen Prinzipien verschafft werden kann, die wir zu ergründen suchen, oder dem überhaupt einer zugeschrieben werden kann, obwohl es kaum möglich scheint.

§. 7. Wenn wir aber die Metaphysiker befragen, zu deren Fach diese Untersuchung im Wesen gehört, erhalten wir zur Antwort, dass alles dasjenige uns gefällt in dem wir Vollkommenheit wahrnehmen und dass wir umso mehr erfreut werden je größere Vollkommenheit wir bemerken; dass uns hingegen diese Dinge missfallen, in denen wir einen Schwund an Vollkommenheit oder sogar Unvollkommenheit bemerken. Denn es ist sicher, dass Vollkommenheit den Wunsch nach Vollkommenheit erzeugt, und dass das dies die Eigenart aller Geister ist, dass sie sich am Entdecken und Erspüren von Vollkommenheiten erfreuen; alles das aber werden sie meiden, von dem sie bemerken dass darin die Vollkommenheit schwindet oder Unvollkommenheit vorhanden ist. Dies wird jedem deutlich werden, der aufmerksamer beobachtet was ihm selbst gefällt; er wird nämlich erkennen, dass es das Ideal der Vollkommenheit ist, sich in den Dingen die er ablehnt das was ihm gefällt als Vollkommenheit zu wünschen.

§. 8. Und dass Vollkommenheit in jeder beliebigen Angelegenheit enthalten ist, erkennen wir, wenn wir sie als so angelegt begreifen, dass alles in ihr zusammenwirkt um ein vor Augen gestelltes Ziel zu erreichen; wenn aber etwas enthalten ist, was nicht zum Ziel führt, erkennen wir einen Mangel an Vollkommenheit. Und wenn weiters etwas wahrgenommen wird, das das Übrige beim Erstreben des Ziels behindert, werten wir das als Unvollkommenheit.
Im ersten Fall gefällt uns das Dargebotene, im letzteren aber missfällt es.
Betrachten wir als Beispiel eine Uhr, deren Zweck es ist die Teile und Unterteilungen der Zeit zu zeigen: sie wird uns am meisten gefallen, wenn wir aus ihrem Aufbau verstehen, dass alle ihre Teile so gefertigt und untereinander verbunden sind, dass sich alle zum genauen Anzeigen der Zeit zusammen bewegen.

§. 9. Und daraus folgt dass in allem, in dem Vollkommenheit enthalten ist, auch notwendigerweise Ordnung enthalten sein muss. Denn Ordnung ist nämlich das nach einer bestimmten Regel vorgenommen Gefüge der Teile, nach der man erkennen kann, warum jeder Teil auf dem Platz, den er einnimmt, eher positioniert ist als auf einem anderen; in einer Sache aber, die mit Vollkommenheit ausgestattet

ist, müssen wohl alle Teile so geordnet sein, dass sie geeignet sind das Ziel zu erreichen: dieses Ziel wird die Regel sein, nach der die Teile der Sache angeordnet sind und die jedem von ihnen den Platz zuweist, den er innehat.
Umgekehrt kann man also auch erkennen, dass, wo Ordnung herrscht, dort auch Vollkommenheit ist, und dass das Gesetz oder die Regel der Ordnung dem Ziel entspricht, das Vollkommenheit schafft. Daher wird uns das gefallen, in dem wir Ordnung wahrnehmen, und Mangel an Ordnung wird uns missfallen.

§. 10. Auf zwei Arten aber können wir Ordnung wahrnehmen:
auf die eine, wenn uns die Gesetzmäßigkeit oder die Regel schon bekannt ist und wir nach ihr den vorliegenden Gegenstand untersuchen;
auf die zweite, wenn wir die Gesetzmäßigkeit vorher nicht kennen und wenn wir aufgrund der Anordnung der Teile des Gegenstands untersuchen, was diese Gesetzmäßigkeit ist die diese Struktur bewirkt hat.
Das oben vorgebrachte Beispiel der Uhr betrifft die erste Art, denn das Ziel ist bereits bekannt d.h. die Gesetzmäßigkeit der Anordnung der Teile, die das Anzeigen der Zeit ist; wenn wir daher die Uhr untersuchen, müssen wir wahrnehmen, ob der Aufbau einer ist, den das Ziel erfordert.
Aber wenn ich irgendeine Folge von Zahlen erblicke wie die folgende:
1, **2**, **3**, **5**, **8**, **13**, **21** usw.,
ohne zu wissen, was das Gesetz ihrer Entwicklung ist, dann begreife ich allmählich, wenn ich diese Zahlen untereinander vergleiche, dass jede beliebige die Summe der beiden vorhergehenden ist, und ich behaupte, dass das auch das Gesetz ihrer Ordnung ist.

§. 11. Letztere Art Ordnung zu erkennen bezieht sich ganz besonders auf die Musik; den musikalischen Zusammenklang verstehen die Hörenden schließlich als Ordnung, die Töne zueinander besitzen, wenn sie manchmal zugleich, manchmal in Folge erklingen. Der musikalische Zusammenklang wird also gefallen, wenn wir die Ordnung der ihn bildenden Töne wahrnehmen, wird aber missfallen, wenn wir nicht durchblicken warum jeder Ton an seinem Platz angeordnet ist: Umso mehr aber wird er uns missfallen müssen, je öfter wir erkennen, dass die Töne von der Ordnung abweichen, die sie nach unserem Urteil besitzen müssen, und sich verirren. Daher kann es geschehen, dass die einen Ordnung erkennen, die andere nicht spüren, weshalb dieselbe Sache den einen gefallen, anderen missfallen kann. Beide aber können getäuscht werden; denn tatsächlich kann Ordnung enthalten sein, die viele nicht erkennen; und oft scheinen einige Menschen Ordnung wahrzunehmen, wo gar keine da ist, und von daher entstehen so unterschiedliche Urteile über musikalische Angelegenheiten.

§. 12. Daher gefällt das, in dem wir die Ordnung wahrnehmen die enthalten ist; mehr Genuss aber werden wir empfinden, wenn mehrere derartige Dinge dargeboten werden, bei denen wir verstehen welche Ordnung sie enthalten; und den höchsten Grad der Annehmlichkeit werden wir spüren, wenn wir außerdem die Ordnung dieser Dinge, die sie zueinander besitzen, verstehen.
Daraus wird klar, dass wir mit geringerem Vergnügen erfüllt werden wenn wir in gewissen dieser Dinge keine Ordnung wahrnehmen, und dass, wenn wir gar keine Ordnung wahrnehmen, dann auch die vorliegende Sache nachlässt uns zu gefallen.
Aber wenn wir nicht nur keine Ordnung beobachten, sondern sogar bemerken, dass etwas völlig Unberechenbares vorhanden ist, durch das die Ordnung gestört wird die ansonsten enthalten ist, dann wird die Sache uns missfallen, und wir werden fast von Schmerz erfüllt wenn wir das wahrnehmen.

§. 13. Je leichter wir die Ordnung wahrnehmen, die im vorliegenden Gegenstand enthalten ist, für umso einfacher und vollendeter halten wir sie und werden deswegen von Freude und einer gewissen Fröhlichkeit erfüllt. Wenn dagegen die Ordnung schwer zu erkennen ist und sie weniger einfach und weniger deutlich scheint, nehmen wir dieselbe mit einer gewissen Traurigkeit wahr.
Dennoch gefällt uns in beiden Fällen das dargebotene Werk, solange wir nur Ordnung spüren, und wir glauben dass in ihm Annehmlichkeit enthalten sei; diese Dinge freilich scheinen miteinander zu kämpfen, weil dasselbe gefallen und Annehmlichkeit besitzen kann, das den Geist zu Traurigkeit bewegt. Aber wenn wir die der Musik eigenen Zusammenklänge und Modulationen erwägen, erkennen wir, dass alle annehmlich sind und gefallen müssen; indessen sehen wir dennoch, dass die einen geeignet sind Freude zu erwecken, andere Traurigkeit.
Deshalb sind von dem was gefällt zwei Geschlechter festzulegen, das erste, das die Herzen fröhlich, das zweite, das sie traurig machen wird.

§. 14. Ähnliches gibt es klarerweise bei Komödien und Tragödien, von denen beide voll Annehmlichkeit sein müssen; notwendigerweise überschütten erstere aber die Gemüter vor allem mit Freude, letztere hingegen erfüllen sie mit Traurigkeit.
Daraus erkennt man, dass es weder dasselbe ist zu gefallen und Freude zu erregen, noch dass es ein Gegensatz ist zu gefallen und Traurigkeit zu bringen.
Wie aber die Begründung dazu beschaffen ist, wurde schon ansatzweise erklärt; denn alles gefällt von dem wir verstehen dass darin Ordnung enthalten ist, davon aber erfüllt nur das mit Freude, was eine einfachere und leichter wahrzunehmende Ordnung hat; das aber macht für gewöhnlich traurige Gemüter, was eine komplexere Ordnung enthält und derart, dass sie schwieriger zu durchschauen ist.

§. 15. Das unterscheidet sich nicht viel davon, was von den Philosophen gewöhnlich über Freude und Traurigkeit gelehrt wird: Denn sie beschreiben die Freude so, dass sie sagen sie sei ein auffallender Grad an Vergnügen; mehr an Vollkommenheit also wird benötigt um Freude zu erregen als nur Gefallen zu bewirken.
Die Definition der Traurigkeit scheint sich freilich viel von der zu unterscheiden die wir gegeben haben; aber man muss beachten dass wir hier nicht über eine solche Traurigkeit sprechen, die für gewöhnlich als Gemütsverfassung beschrieben wird, weil sie im Betrachten von Mängeln besteht. Und auf Traurigkeit dieser Art zielt die Musik auch nicht ab, noch kann sie es, weil sie ja zu gefallen versucht.
Und so liegt für uns die Traurigkeit nur in der schwierigeren Wahrnehmung der Vollkommenheit bzw. der Ordnung und unterscheidet sich deswegen von der Freude allein im Grad.

§. 16. Bei Tönen aber gibt es vor allem zwei Ursachen die Ordnung enthalten können, nämlich deren Tiefe oder Höhe – als die wir die Quantität der Töne festsetzten – und die Dauer. Wegen ersterer gefällt ein musikalischer Zusammenklang, wenn wir die Ordnung wahrnehmen, welche die Töne nach dem Verhältnis der Tiefe und Höhe untereinander besitzen; wegen letzterer aber gefällt er, wenn wir die Ordnung verstehen, welche die Längen der Töne besitzen.
Außer diesen zweien gibt es bei Tönen nichts anderes, was geeignet wäre Ordnung wahrzunehmen außer vielleicht der Lautstärke; aber obwohl die Musiker für gewöhnlich auch diese in ihren Zusammenklängen nutzen, sodass die Töne bald stark bald schwach erzeugt werden müssen, trachten sie dennoch in der Wahrnehmung des Verhältnisses bzw. der Ordnung, die diese Grade der Stärke untereinander haben, nicht nach Annehmlichkeit; und deswegen definieren sie für gewöhnlich keine Quantität der Stärke noch können sie es.

§. 17. Weil Ordnung die Anordnung der Teile nach einer bestimmten Regel ist, nimmt jemand, der durch Einsicht diese Regel erkennt, auch die Ordnung wahr und die Wahrnehmung selbst gefällt ihm.
In der Musik aber bestimmen die Größen die Ordnung: Denn ob wir Tiefe und Höhe oder die Dauer beachten, beides wird durch Größen bestimmt; ersteres freilich durch die Geschwindigkeit der in der Luft erzeugten Stöße, letzteres aber durch die Zeit, die jeder Ton klingt. Wer also die Beziehung der Geschwindigkeiten der Stöße wahrnimmt, der erfasst die Ordnung der Töne, und dadurch wird er erfreut. Wer in ähnlicher Weise die Dauern der Töne unterscheiden und miteinander vergleichen kann, der erkennt ebenfalls Ordnung und wird deswegen mit Vergnügen erfüllt. Wie wir aber die Ordnung erkennen, muss deutlicher erklärt werden, und freilich für beide Arten getrennt.

§. 18. Bei zwei Tönen werden wir ihre Beziehung wahrnehmen, wenn wir das Verhältnis verstehen, das die Zahlen der in derselben Zeit erzeugten Pulse untereinander haben; sodass wir, wenn der eine in derselben Zeit **3** während der zweite **2** Pulse ausführt, ihre Beziehung ebenso als Ordnung erkennen indem wir dieses Verhältnis als eineinhalb wahrnehmen.
Und auf ähnliche Art erfassen wir die wechselseitige Beziehung mehrerer Töne, wenn wir alle Verhältnisse erkennen, welche die Anzahlen der in derselben Zeit hervorgebrachten Schwingungen der einzelnen Töne untereinander besitzen.
Vergnügen erhalten wir auch von Tönen unterschiedlicher Dauer, wenn wir die Verhältnisse wahrnehmen, welche die Zeiten der einzelnen untereinander besitzen.
Daraus wird klar, dass alles Vergnügen in der Musik aus der Wahrnehmung der Verhältnisse entsteht die mehrere Zahlen untereinander besitzen, weil auch die Zeiten der Dauern durch Zahlen ausgedrückt werden können.

§. 19. Freilich gibt es eine große Hilfe beim Erfassen der Verhältnisse der Töne, weil wir die Pulse der einzelnen mehrmals wahrnehmen und sie öfter untereinander vergleichen können. Deshalb ist es um vieles einfacher, das Verhältnis zweier Töne durch Hören zu unterscheiden, als das zweier Linien die dasselbe Verhältnis haben durch Betrachten.
Ähnlich aber wäre das Verhältnis der Töne und der Linien, wenn wir nur zwei Stöße der einzelnen Töne erhielten und gezwungen wären über die Beziehung ihrer Intervalle zu urteilen. Aber weil auch bei nicht übermäßig schnellen Tönen in kurzer Zeit sehr viele Pulse erzeugt werden – wie man im vorigen Kapitel sehen kann, wo wir die Anzahl der in einer Sekunde geschehenden Schwingungen einer Saite erklärt haben – wird das Erkennen des Verhältnisses der Töne um vieles einfacher. Daher kann man in der Musik überaus komplexe Verhältnisse verwenden, die der Sehsinn, wenn dieselben bei Linien vorkämen, sehr schwer erkennen würde.

§. 20. Weil tiefere Töne in derselben Zeit weniger Pulse abgeben als höhere, ist es offensichtlich dass das Verhältnis höherer Töne leichter wahrgenommen werden kann als das tieferer, wenn freilich beide gleich lang dauern. Wenn daher alles andere gleich ist, müssen tiefere Töne länger dauern und langsamer einander folgen als höhere, die schneller fortschreiten können. Daher muss man sicher diese Regel befolgen, dass tieferen Tönen größere Dauer zugemessen wird, höheren geringere. Man versteht aber, dass beide umso mehr ausgedehnt werden müssen, je komplexer die Verhältnisse sind, die sie untereinander besitzen, und je schwieriger sie wahrgenommen werden. Es kann daher trotzdem geschehen, dass höhere langsamer einhergehen müssen, während tiefere schnell fortschreiten können; wenn allerdings letztere einfache, erstere aber überaus komplexe Verhältnisse besitzen.

§. 21. Damit aber die Art und Weise leichter verstanden werden kann, in der die Ordnung bzw. das Verhältnis zweier oder mehrerer Töne wahrgenommen wird, werden wir versuchen, für die Anschauung eine bildliche Darstellung vor Augen zu führen so weit das möglich ist.
Die Pulse selbst, die an das Ohr dringen, werden wir als auf einer geraden Linie positionierten Punkte darstellen, deren Distanzen den Abständen der Pulse entsprechen; mehrere Figuren dieser Art stellt *Tab. I.* dar.

Tab. I.

1

Fig. 1.

2
1

Fig. 2.

3
1

Fig. 3.

4
1

Fig. 4.

3
2

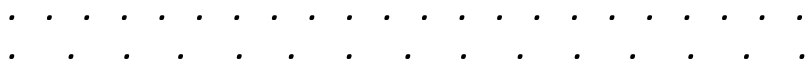

Fig. 5.

4
3

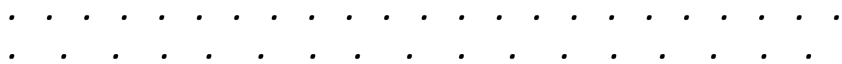

Fig. 6.

5
4

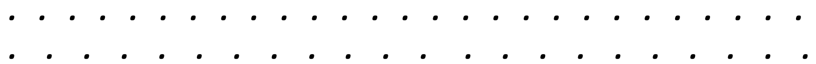

Fig. 7.

5
3

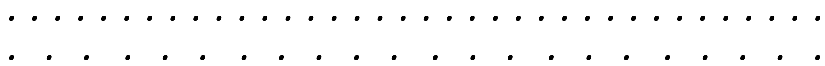

Fig. 8.

6
5
4

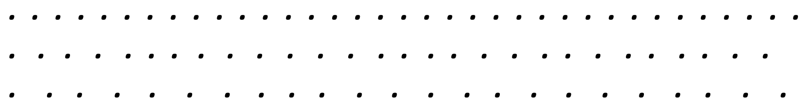

Fig. 9.

Auf diese Weise wird also ein gleichmäßiger Klang, das heißt einer, der durch seine gesamte Dauer dieselbe Tiefe oder Höhe hat, durch eine Reihe von äquidistanten Punkten wie in *Fig. 1.* beschrieben.
Weil in dieser überall das Verhältnis der Gleichheit sichtbar wird, ist nicht zu zweifeln, dass die Ordnung sehr einfach verstanden wird.
Der Einklang oder „unisono“ wie man ihn gewöhnlich nennt begründet uns den ersten und einfachsten Grad Ordnung wahrzunehmen, den wir den ersten „Grad der Annehmlichkeit“ (*gradus suavitatis*) nennen werden, und diesen hat das Verhältnis **1:1** in Zahlen.

§. 22. Wenn nun dem Gehör zwei Töne vorliegen, die das doppelte Verhältnis besitzen, sollen diese durch zwei Reihen von Punkten ausgedrückt werden, in deren zweiter die Distanzen der Punkte zweimal größer sind als in der ersten; wie in *Fig. 2.*, wo die obere Reihe den höheren Ton, die untere aber den tieferen darstellt.
Wenn man diese gleichzeitig betrachtet, wird auch leicht eine Ordnung wahrgenommen, wie sich bei Durchsicht der Figur zeigt. Weil diese aber nach dem unisono die einfachste ist, definieren wir sie als den zweiten Grad der Annehmlichkeit, der daher im Verhältnis der Zahlen **1:2** enthalten ist.
Auf ähnliche Weise zeigt *Fig. 3.* das Verhältnis **1:3** und *Fig. 4.* das Verhältnis **1:4**. Welches von den beiden einfacher wahrzunehmen ist, kann man in beide Richtungen diskutieren. Ersteres nämlich hat die Eigenschaft, dass es mit kleineren Zahlen ausgedrückt wird, letzteres aber, das Vierfache, scheint deswegen einfacher wahrzunehmen, weil es das Doppelte des doppelten Verhältnisses ist und daher nicht viel schwieriger erkannt wird als das Doppelte selbst.
Deswegen werden wir beide zum selben Grad zusammenwerfen, also zum dritten.

§. 23. So wie also das Verhältnis **1:1** den ersten Grad der Annehmlichkeit begründet und das Verhältnis **1:2** den zweiten, und genauso das Verhältnis **1:4** zum dritten führt; so werden wir zum vierten Grad das Verhältnis **1:8** rechnen, und zum fünften **1:16**, und so weiter nach einer geometrischen Folge mit jeweiliger Verdopplung. Infolgedessen ist es deutlich, dass das Verhältnis $\mathbf{1:2^n}$ zum Grad führt, der mit der Zahl $\mathbf{n + 1}$ dargestellt wird.
Umso lieber habe ich diese Verteilung der Grade angenommen, weil sie gleichmäßig in der Möglichkeit der Wahrnehmung fortschreiten, sodass, um wie viel z.B. der fünfte Grad schwieriger wahrgenommen wird als der vierte, um soviel schwieriger dieser erkannt wird als der dritte, und dieser selbst als der zweite.
Dazwischen definiere ich keine mittleren fortschreitenden Grade sodass **n** eine Bruchzahl würde, weil in diesem Fall das Verhältnis irrational und überhaupt nicht erfassbar wäre.

§. 24. Wenn also die Zahl zusammengesetzt ist (d.h. Teiler hat), die zur Einheit die Beziehung hat die den zwei Tönen entspricht, ergibt sich daraus dass dann der Grad der Annehmlichkeit auch kleiner wird;
so wie wir gesehen haben, dass das Verhältnis **1:4** nicht für komplexer zu halten ist als **1:3** obwohl **4** größer ist als **3**.
Dagegen ist augenscheinlich, dass der Grad der Annehmlichkeit aus der tatsächlichen Größe der Zahlen zu bewerten ist, wenn sie Primzahlen sind; so wird das Verhältnis **1:5** einfacher sein als **1:7**, obwohl es etwa nicht einfacher ist als **1:8**.
Und über Primzahlen kann man durch Schlussfolgerung noch etwas feststellen: Weil nämlich **1:1** den ersten Grad ergibt, **1:2** den zweiten Grad, **1:3** den dritten, schließen wir dass **1:5** zum fünften führt, **1:7** zum siebenten, und allgemein **1:p**, sofern **p** eine Primzahl ist, zum Grad der mit der Zahl **p** bezeichnet wird.

§. 25. Geschlossen wird weiter nach §. 23. dass, wenn das Verhältnis **1:p** zum Grad führt dessen Index **m** sei, das Verhältnis **1:2p** zum Grad **m + 1** gehört, **1:4p** zum Grad **m + 2**, und $\mathbf{1:2^n p}$ zum Grad **m + n**.
Wenn nämlich **p** mit **2** multipliziert wird, braucht man zur Wahrnehmung des Verhältnisses außer der Wahrnehmung des Verhältnisses **1:p** eine Zweiteilung oder Verdoppelung, durch die wie in der einfachsten Operation der Grad der Annehmlichkeit um die Eins erhöht wird.
In ähnlicher Art kann man den Grad der Annehmlichkeit des Verhältnisses **1:pq** bestimmen, wenn **p** und **q** Primzahlen sind: denn **1:pq** ist um ebenso viel komplexer als **1:p**, wie **1:q** komplexer ist als **1:1**.
Daher muss der Grad des Verhältnisses **1:pq** mit **p**, **q** und **1** eine arithmetische Beziehung bilden, und wird folglich also **p + q – 1** sein.

§. 26. Diese Berechnung gilt auch allgemein: Wenn nämlich das Verhältnis **1:P** den Grad **p** besitzt und das Verhältnis **1:Q** den Grad **q**, wird wegen der angeführten Berechnungen das Verhältnis **1:PQ** den Grad **p + q – 1** besitzen.
Offensichtlich sind die Grade beider Teilverhältnisse miteinander zu addieren und von der Summe die Eins zu subtrahieren.
Daher wird beim Verhältnis **1:pqr** (bei gegebenen Primzahlen **p**, **q** und **r**), das aus **1:pq** und **1:r** zusammengesetzt ist, deren Grade **p + q – 1** und **r** sind, der Grad der Annehmlichkeit **p + q + r – 2** sein.
In ähnlicher Art und Weise wird der Grad des Verhältnisses **1:pqrs**
p + q + r + s – 3 sein.
Und der Grad des Verhältnisses **1:PQRS** wird **p + q + r + s – 3** sein, wenn die Grade der Verhältnisse **1:P**, **1:Q**, **1:R** und **1:S** freilich **p**, **q**, **r** und **s** sind.

§. 27. Also sieht man daraus, dass der Grad der Annehmlichkeit des Verhältnisses **$1:p^2$**, wenn freilich eine Primzahl **p** angenommen wird, **$2p - 1$** ist, und dass der Grad des Verhältnisses **$1:p^3$ $3p - 2$** ist, und dass allgemein das Verhältnis **$1:p^n$** den Grad **$np - n + 1$** bewirkt.
Weil daher **$1:q^m$** zum Grad **$mq - m + 1$** führt, muss nach der Regel, die im vorigen Paragraphen gegeben wurde, das aus diesen beiden zusammengesetzte Verhältnis **$1:p^n q^m$** den Grad **$np + mq - n - m + 1$** bewirken.
Und welche Zahl **P** auch immer im Verhältnis **1:P** steht, der Grad zu dem sie führt wird erhalten, indem man sie in alle ihre Primfaktoren zerlegt, diese miteinander addiert und von deren Summe die um die Eins verminderte Anzahl der Faktoren subtrahiert.
Wenn so der Grad des Verhältnisses **1:72** gesucht ist, muss, weil **72 = 2·2·2·3·3** und die Summe dieser Faktoren **12** und deren Anzahl **5** ist, **4** von **12** subtrahiert werden; **8** wird der Grad der Annehmlichkeit für das Verhältnis **1:72** sein.

§. 28. Wenn ein Verhältnis zwischen drei Zahlen wie **1:p:q** vorliegt, wo **p** und **q** Primzahlen sind, wird es notwendig sein, in ihm die Verhältnisse **1:p** und **1:q** wahrzunehmen. Aber diese zwei Verhältnisse zugleich sind gleich einfach wahrzunehmen wie das aus ihnen zusammengesetzte **1:pq**.
Welchen Grad daher das Verhältnis **1:p:q** bewirkt, ist aus der Zahl **pq** nach der erklärten Regel zu erkennen. Auf dieselbe Weise wird beim Verhältnis von vier Zahlen **1:p:q:r**, wo **p**,**q**,**r** wiederum Primzahlen sind, der Grad aus der Zahl **pqr** hervorgehen.
Wenn so vier durch die Zahlen **1:2:3:5** ausgedrückten Töne vorliegen, muss aus der Zahl **30** der Grad erkannt werden, auf den die Fähigkeit des Erfassens ihrer Ordnung untereinander führt, und das ergibt den achten Grad.

§. 29. Es müssen aber diese Primzahlen alle ungleich sein, andernfalls die angewandte Rechnung nicht stimmt. Denn das Verhältnis **1:p:p** wird gleich leicht erfasst wie **1:p**, weil die zwei letzteren Zahlen, die ein Verhältnis der Gleichheit haben, wie eine behandelt werden können; auch nicht äquivalent zu werten ist dieses Verhältnis dem folgenden **$1:p^2$**.
Ähnlich darf man auch, wenn die Zahlen **p**,**q**,**r** usw. keine Primzahlen sind, nicht auf diese Weise rechnen.
Wenn so ein Verhältnis **1:pr:qr:ps** sei, mit gegebenen Primzahlen **p**,**q**,**r** und **s**, muss man nur die einfachen Verhältnisse **1:p**, **1:q**, **1:r** und **1:s** beachten, nicht aber die Verhältnisse **1:p** und **1:r** zweimal, obwohl sie zweimal auftreten. Daher wird der Grad der Annehmlichkeit aus dem Verhältnis, das aus diesen einfachen zusammengesetzt ist, zu ermitteln sein, **1:pqrs**, also aus der Zahl **pqrs**.

§. 30. Wenn wir aber nicht nur die Zahl **pqrs** selbst betrachten sondern auch die Art wie sie entsteht, erkennen wir, dass diese Zahl **das kleinste gemeinsame Vielfache** der Zahlen **1**, **pr**, **qr** und **ps** ist, also die kleinste Zahl die durch diejenigen dividiert werden kann, zwischen denen es die Aufgabe war ein Verhältnis zu finden.
Daraus formen wir folgende allgemeine Regel um den Grad der Annehmlichkeit zu erkennen, in dem man das Verhältnis mehrerer Zahlen wahrnimmt die zugleich vorliegen:
Zweifellos muss ihrer aller kleinstes gemeinsames Vielfaches gesucht werden; und aus dieser Zahl wird nach der Regel, die oben in §. 27. gegeben wurde, der Grad an Annehmlichkeit bestimmt werden.

Ich habe daher folgende Tabelle eingefügt, aus der hervorgeht, zu welchem Grad jedes beliebige kleinste gemeinsame Vielfache im Ergebnis führt. Ich habe sie aber nicht über den sechzehnten Grad hinaus weitergeführt, weil für gewöhnlich nur selten Zahlen auftreten, die zu höheren Graden führen.

§. 31. In dieser Tabelle also bezeichnen die römischen Zahlen die Grade der Annehmlichkeit und die folgenden Zahlen (in der zweiten Spalte) alle kleinsten gemeinsamen Vielfachen, die zu ihnen führen:

I.	**1**.
II.	**2**.
III.	**3**; **4**.
IV.	**6**; **8**.
V.	**5**; **9**; **12**; **16**.
VI.	**10**; **18**; **24**; **32**.
VII.	**7**; **15**; **20**; **27**; **36**; **48**; **64**.
VIII.	**14**; **30**; **40**; **54**; **72**; **96**; **128**.
IX.	**21**; **25**; **28**; **45**; **60**; **80**; **81**; **108**; **144**; **192**; **256**.
X.	**42**; **50**; **56**; **90**; **120**; **160**; **162**; **216**; **288**; **384**; **512**.
XI.	**11**; **35**; **63**; **75**; **84**; **100**; **112**; **135**; **180**; **240**; **243**; **320**; **324**; **432**; **576**; **768**; **1024**.
XII.	**22**; **70**; **126**; **150**; **168**; **200**; **224**; **270**; **360**; **480**; **486**; **640**; **648**; **864**; **1152**; **1536**; **2048**.

XIII.	**13**; **33**; **44**; **49**; **105**; **125**; **140**; **189**; **225**; **252**; **300**; **336**; **400**; **405**; **448**; **540**; **720**; **729**; **960**; **972**; **1280**; **1296**; **1728**; **2304**; **3072**; **4096**.
XIV.	**26**; **66**; **88**; **98**; **210**; **250**; **280**; **378**; **450**; **504**; **600**; **672**; **800**; **810**; **896**; **1080**; **1440**; **1458**; **1920**; **1944**; **2560**; **2592**; **3456**; **4608**; **6144**; **8192**.
XV.	**39**; **52**; **55**; **99**; **132**; **147**; **175**; **176**; **196**; **315**; **375**; **420**; **500**; **560**; **567**; **675**; **756**; **900**; **1008**; **1200**; **1215**; **1344**; **1600**; **1620**; **1792**; **2160**; **2187**; **2880**; **2916**; **3840**; **3888**; **5120**; **5184**; **6912**; **9216**; **12288**; **16384**.
XVI.	**78**; **104**; **110**; **198**; **264**; **294**; **350**; **352**; **392**; **630**; **750**; **840**; **1000**; **1120**; **1134**; **1350**; **1512**; **1800**; **2016**; **2400**; **2430**; **2688**; **3200**; **3240**; **3584**; **4320**; **4374**; **5760**; **5832**; **7680**; **7776**; **10240**; **10368**; **13824**; **18432**; **24576**; **32768**.

§. 32. Es gibt mehrere Arten das kleinste gemeinsame Vielfache zu finden, von denen wir eine erklären wollen die für unsere Arbeit am vorteilhaftesten ist. Man zerlege die einzelnen gegebenen Zahlen in ihre Primfaktoren und markiere die Stellen, an denen jeder beliebige dieser Faktoren die höchste Vielfachheit (die größte Potenz) hat; dann nehme man das Produkt aus diesen Faktoren mit den größten Potenzen, und das wird das kleinste gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen sein.
Seien z.B. folgende Zahlen gegeben: **72**, **80**, **100**, **112**, die in Primfaktoren zerlegt $\mathbf{2^3 \cdot 3^2}$, $\mathbf{2^4 \cdot 5}$, $\mathbf{2^2 \cdot 5^2}$, $\mathbf{2^4 \cdot 7}$ sind, und die Primfaktoren **2**, **3**, **5**, **7**. Von denen hat der erste (**2**) die größte Potenz **4**, die größte Potenz des zweiten (**3**) ist **2**, gleich für den dritten (**5**), aber für den vierten (**7**) tritt die erste Potenz auf. Daher ist das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathbf{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$ oder **25200**, und das führt zum dreiundzwanzigsten Grad.

§. 33. Wenn man also beliebige Zahlen gegeben hat, werden wir aus den dargelegten Regeln erfahren können, ob es einfach oder schwierig ist ihr gegenseitiges Verhältnis und ihre Ordnung wahrzunehmen, und zu welchem Grad. Mehrere Fälle werden wir miteinander vergleichen können und beurteilen, welcher von ihnen einfacher erfasst werden kann.
Aber diese Zahlen, die das vorliegende Verhältnis bestimmen, müssen rationale, ganze und möglichst kleine sein.
Das erste davon kann man leicht verstehen, weil in den irrationalen Zahlen keine derartige Ordnung enthalten ist.
Ganze Zahlen müssen es aber sein, weil die Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen keine Brüche umfasst; durch bekannte Regeln aber können die Brüche in ganze Zahlen umgewandelt werden, sodass dieselbe wechselseitige Relation erhalten bleibt.

Außerdem müssen diese Verhältnisse in möglichst kleinen Zahlen ausgedrückt sein, sodass es keine andere Zahl außer der Eins gibt, durch die alle geteilt werden können. Wenn sie aber nicht kleinstmöglich sind, muss man sie vorher durch den größten gemeinsamen Teiler dividieren, den sie haben.

§. 34. Auf diese Weise können also auch die Grade der Annehmlichkeit der nicht komplizierten Verhältnisse bestimmt werden, wie wir sie zu Beginn betrachteten.
So führt des Verhältnis **2:3** zum vierten Grad, da das kleinste gemeinsame Vielfache **6** ist, und wird gleich einfach wahrgenommen wie das Verhältnis **1:6** oder **1:8**.
Diese Wahrnehmung aber entspricht der Betrachtung der punktierten Figur *Fig. 5.*, in der freilich die Ordnung leicht erkannt werden kann.
Und aus ebensolchen Figuren wird man erkennen, wie schwierig Verhältnisse wahrgenommen werden die zu höheren Graden führen; wenn z.B. das Verhältnis **5:7** gegeben ist das zum elften Grad gehört, wird man aus dessen auf solche Weise gezeichneter Figur die Ordnung schon ziemlich schwierig wahrnehmen. Ebenso verhält sich die Sache in den darauffolgenden Graden, sodass es aus Figuren dieser Art offensichtlich ist, dass die Ordnung umso schwieriger wahrgenommen werden kann mit je höherer Zahl der Grad ausgedrückt wird.

§. 35. Von hier aus eröffnen sich noch um vieles breitere Anwendungen dieser Art und Weise die Wahrnehmung von Ordnung zu beurteilen als nur bei Tönen die sich an Tiefe und Höhe unterscheiden.
Man kann sie nämlich auch für Klänge verschiedener Dauer anpassen, indem man die Töne mit zur Dauer proportionalen Zahlen beschreibt. Doch bei letzteren kann man die Grade nicht so fortdauernd verwenden wie im ersten Fall in dem die Tiefe und Höhe der Töne betrachtet wird, weil dort ja die Pulse öfter wiederkehren und deswegen die Beziehung leichter erkannt wird. Die Wahrnehmung des Verhältnisses mehrerer an Dauer unterschiedlicher Töne ist hingegen vergleichbar der Betrachtung von Linien, deren gegenseitige Beziehung man aus einem einzigen Hinsehen verstehen muss.
Außerdem wird diese Arbeit auch bei allen anderen Dingen, in denen Anmut und Ordnung enthalten sein soll, großen Nutzen haben, wenn freilich das was die Ordnung bewirkt auf Größen zurückgeführt und mit Zahlen ausgedrückt werden kann; so wie in der Architektur, in der für die Anmut erforderlich ist, dass alle Teile eines Gebäudes in einer wahrnehmbaren Ordnung angelegt sind.