

Konsonanzen

§. 1. Mehrere zugleich erklingende Töne bestimmen einen zusammengesetzten Klang, den wir hier „Konsonanz“ nennen werden. Von anderen wird freilich das Wort der Konsonanz in dem strikteren Sinn angenommen, dass es nur einen dem Gehör angenehmen Zusammenklang bezeichnet der viel an Annehmlichkeit in sich trägt; und diese Konsonanz unterscheiden sie von einer Dissonanz, die für sie ein Zusammenklang ist der wenig oder nichts an Annehmlichkeit umfasst. Aber weil es einerseits schwierig ist die Grenzen der Konsonanzen und Dissonanzen zu definieren, andererseits aber diese Unterscheidung mit unserer Art der Untersuchung weniger zusammenpasst nach der wir die Zusammenklänge nach den in Kapitel II dargelegten Graden der Annehmlichkeit beurteilen wollen, werden wir allen Klängen, die aus zugleich erklingenden Einzeltönen bestehen, den Namen der Konsonanz zuschreiben.

§. 2. Damit daher eine derartige Konsonanz gefällt, ist es notwendig, dass das Verhältnis wahrgenommen wird, das die einfachen Töne die sie bestimmen untereinander besitzen. Weil aber hier die Dauer der Töne nicht betrachtet wird, wird allein die Wahrnehmung des Unterschieds, der in der Tiefe und Höhe der Töne besteht, diese Annehmlichkeit enthalten. Weil die Tiefe und Höhe der Töne aus der in derselben Zeit bewirkten Pulse zu messen ist, muss daher, wer die gegenseitige Relation dieser Zahlen wahrnimmt, offensichtlich auch die entsprechende Annehmlichkeit der Konsonanz spüren.

§. 3. Oben aber haben wir schon entschieden, die Töne an sich durch die Anzahlen der Pulse auszudrücken, die sie in einer gegebenen Zeit ausführen, und daraus die Quantität der Töne zu messen, d.h. den Melodieverlauf der durch das Verhältnis der Tiefe und Höhe bestimmt wird. Damit daher die vorgelegte Konsonanz gefällt, ist es notwendig, dass das Verhältnis wahrgenommen wird, das die Quantitäten der einfachen Töne, d.h. die Töne selbst (die Töne nämlich betrachten wir als die Quantitäten) zueinander haben. Auf diese Weise also führen wir die Wahrnehmung der Konsonanzen auf die Betrachtung von Zahlen zurück, weshalb im zweiten Kapitel die Vorschriften erklärt wurden, aus denen verstanden werden kann, auf welche Weise die Annehmlichkeit jeder beliebigen Konsonanz zu beurteilen ist.

§. 4. Daher wird es einfach sein, die Wahrnehmung jeder beliebigen Konsonanz auf einen bestimmten Grad der Annehmlichkeit zurückzuführen, aus dem offensichtlich wird, ob die vorgelegte Konsonanz einfach oder schwierig und darüber hinaus mit welchem Grad vom Geist verstanden wird. Außerdem aber werden mehrere Konsonanzen untereinander verglichen werden können, und daraus wird man beurteilen können welche in der Wahrnehmung einfacher und welche schwieriger ist, und gleichzeitig wird bestimmt werden können, um wie viel die eine einfacher als die andere verstanden werden kann. Bei gegebener Konsonanz muss man also die Zahl finden, die das kleinste gemeinsame Vielfache der die Einzeltöne darstellenden Zahlen ist, und untersuchen zu welchem Grad diese führt. Daraus wird nämlich deutlich wie viel erforderlich ist um die Konsonanz zu erfassen.

§. 5. Weil also das kleinste gemeinsame Vielfache der Einzeltöne benötigt wird, muss man diese Töne immer durch ganze Zahlen ausdrücken, und zwar durch die kleinsten, die untereinander dasselbe Verhältnis besitzen; das erkennt man, wenn diese Zahlen keinen gemeinsamen Teiler haben außer der Eins. Wenn man also diese gewissermaßen erste Operation vorgenommen hat, ist daraufhin das kleinste gemeinsam Vielfache gemäß den im zweiten Kapitel erklärten Regeln zu finden. Schließlich wird auch durch diese Regeln bekannt werden, zu welchem Grad der Annehmlichkeit dieses kleinste gemeinsame Vielfache führt, und man kann beurteilen dass mit diesem auch die Konsonanz selbst wahrgenommen wird. Sofern freilich dieses kleinste gemeinsame Vielfache den sechzehnten Grad nicht übersteigt, ist diese letzte Operation nicht notwendig, weil die obige Tabelle alle diese Grade enthält.

§. 6. Wir werden aber im Folgenden dieses kleinste gemeinsame Vielfache der Einzeltöne, die die Konsonanz bilden, die „Darstellungszahl“ (*exponens*) der Konsonanz nennen, denn wenn diese bekannt ist, wird zugleich die Natur der Konsonanz selbst durchschaut. Auf welche Weise aber aus dieser gegebenen Darstellungszahl der Grad der Annehmlichkeit gefunden werden soll, wird in Kap. II §. 27. so erklärt: Diese Darstellungszahl soll in alle ihre Primfaktoren zerlegt werden, von diesen soll die Summe genommen werden, die s sei. Wenn die Anzahl der Faktoren mit $= n$ angenommen wird, wird der Grad der Annehmlichkeit, zu dem die vorliegende Konsonanz führt, $s - n + 1$ sein; als je kleiner diese Zahl also ermittelt wird, umso annehmlicher wird die Konsonanz sein, d.h. in der Wahrnehmung einfacher.

§. 7. Nicht unpassend werden die Konsonanzen auch nach der Anzahl der Einzeltöne eingeteilt, aus denen sie zusammengesetzt sind; und von daher sind die einen Zweiklänge, andere Dreiklänge und andere Vielklänge, wie sie aus zwei oder drei oder mehr Tönen bestehen.

Seien daher in Zweiklängen die zwei Töne, aus denen sie bestehen, **a** und **b**, das heißt, dass diese Zahlen auf jeden Fall die Töne an sich numerisch beschreiben. Daher werden **a** und **b** ganze Zahlen und teilerfremd sein müssen. Deswegen wird auch das kleinste gemeinsame Vielfache **ab** sein und daher wird von der vorliegenden Konsonanz die Zahl **ab** selbst die Darstellungszahl sein, aus der der Grad der Annehmlichkeit berechnet wird zu dem sie führt.

Wir wollen aber solche Konsonanzen nach dem Grad der Annehmlichkeit beurteilen, sodass aus der Anordnung selbst offensichtlich wird, wie einfach oder schwierig jede wahrzunehmen ist.

§. 8. Um aber eine solche Aufzählung auszuarbeiten ist es nur notwendig, dass die einzelnen Zahlen aus der dem Kapitel II angehängten Tabelle der Reihe nach herausgeschrieben werden und dass jede von ihnen in zwei teilerfremde Faktoren zerlegt wird, was oft auf mehrere Arten geschehen wird können. Danach werden diese zwei Faktoren Töne eines Zweiklangs ergeben, dessen Darstellungszahl jene Zahl selbst sein wird, aus der diese Faktoren gewonnen wurden.

Zum Beispiel befindet sich beim **V**. Grad die **12**, die auf zweifache Weise in teilerfremde Faktoren zerlegt werden kann: **1, 12** und **3, 4**. Diese Töne bestimmen Konsonanzen, die zum Grad **V** führen und deren Darstellungszahl **12** ist.

§. 9. Daher führt zum ersten Grad, in dem sich die Eins befindet, keine Konsonanz, weder von zwei noch von mehr Tönen. Weil nämlich die Töne die eine Konsonanz bilden verschieden sein müssen, wird die Eins niemals das kleinste gemeinsame Vielfache von ihnen sein können, d.h. die Darstellungszahl. Deswegen wird die einfachste Konsonanz zum zweiten Grad führen, und diese werden Töne bilden, die das Verhältnis **1:2** besitzen und deren Darstellungszahl daher **2** ist, die Zahl die als einzige beim zweiten Grad gefunden wird. Diese Konsonanz wird von den Musikern „Diapason“ oder „Oktav“ genannt und von ihnen für die einfachste und vollendetste gehalten; denn am einfachsten wird sie vom Gehör wahrgenommen und von anderen erkannt.

§. 10. Auf den dritten Grad führten wir zwei Zahlen zurück, **3** und **4**, von denen beide in zwei teilerfremde Faktoren zerlegt werden können (d.h. ohne gemeinsamen Teiler außer der Eins), erstere nämlich in **1** und **3**, letztere aber in **1** und **4**.

Es ergeben sich also zwei Zweiklänge, die zum dritten Grad führen, von denen der eine aus Tönen besteht, die das Verhältnis **1:3** besitzen, der andere aber aus Tönen mit dem Verhältnis **1:4**.

Ersterer wird für gewöhnlich „Diapason mit Diapente“ genannt, letzterer aber „Diadiapason“, und auch bei diesen kann es nicht zweifelhaft sein, dass sie einfacher wahrgenommen werden als die folgenden.

§. 11. Auf diese Weise erstellte ich die folgende Tabelle der Konsonanzen zweier Töne, in der diese nach den früher erklärten Graden der Annehmlichkeit angeordnet sind, und zwar bis zum zehnten Grad.

II. Grad 1:2.	VI. Grad 1:10. 2:5. 1:18. 2:9. 1:24. 3:8. 1:32.	VIII. Grad 1:14. 2:7. 1:30. 2:15. 3:10. 5:6. 1:40. 5:8. 1:54. 2:27. 1:72. 8:9. 1:96. 3:32. 1:128.	IX. Grad 1:21. 3:7. 1:25. 1:28. 4:7. 1:45. 5:9. 1:60. 3:20. 4:15. 5:12. 1:80. 5:16. 1:81. 1:108. 4:27. 1:144. 9:16. 1:192. 3:64. 1:256.	X. Grad 1:42. 3:14. 6:7. 1:50. 2:25. 1:56. 7:8. 1:90. 2:45. 5:18. 9:10. 1:120. 3:40. 5:24. 8:15. 1:160. 5:32. 1:162. 2:81. 1:216. 8:27. 1:288. 9:32. 1:384. 3:128. 1:512.
III. Grad 1:3. 1:4.				
IV. Grad 1:6. 2:3. 1:8.				
V. Grad 1:5. 1:9. 1:12. 3:4. 1:16.	VII. Grad 1:7. 1:15. 3:5. 1:20. 4:5. 1:27. 1:36. 4:9. 1:48. 3:16. 1:64.			

§. 12. Aus Kap. I §. 11. erkennt man, wie zwei Saiten gespannt werden müssen, dass sie Töne erzeugen die ein vorgegebenes Verhältnis besitzen; auf diese Art wird es also einfach sein, mit Saiten diese Konsonanzen zu erzeugen und real zu erfahren welche in der Wahrnehmung einfacher und welche schwieriger sind: Man wird aber finden, dass die Erfahrung hervorragend mit dieser Theorie übereinstimmt.

Dass aber durch Versuche dieser Art das Gehör eines Studiosus der Musik geübt wird, halte ich nicht nur für überaus nützlich sondern auch für äußerst notwendig; denn er wird durch diese Überlegungen für sich deutliche Vorstellungen dieser einfachen Konsonanzen entwickeln und wird sich besser eignen, die Musik in der Praxis selbst auszuüben.

§. 13. Wer Musik übt, muss aber nicht notwendigerweise genaue Ideen aller aufgezählten Konsonanzen haben, sondern es reicht aus nur die wichtigsten gut in den Geist einzuprägen, die da sind:

1:2

1:3 oder 2:3

1:5 oder 2:5 oder 4:5.

Denn wer diese nicht nur von den anderen zu unterscheiden, sondern auch mit der Stimme zu bilden oder auf Saiten mit Hilfe des Gehörs zu erzeugen vermag, der wird auch alle übrigen Konsonanzen, deren Darstellungszahlen keine anderen Teiler besitzen als **2, 3 und 5**, allein mit dem Gehör herstellen können.

Und das wird auch für die gegenwärtige Musik und zum Einrichten der Musikinstrumente genügen.

In mehreren folgenden Abschnitten will ich das aber darlegen.

§. 14. Ich habe schon angemerkt, dass ich hier unter dem Namen der „Konsonanz“ sowohl die Konsonanzen als auch die allgemein als Dissonanzen bezeichneten Intervalle zusammenfasse.

Aus der beigefügten Tabelle aber und mit unserer Methode können die Grenzen einigermaßen definiert werden. Die Dissonanzen führen nämlich zu höheren Graden, und für Konsonanzen werden die gehalten, die zu niedrigeren Graden führen.

So ist der Tonus, der aus Tönen mit dem Verhältnis **8:9** besteht, zum achten Grad gehörig und wird zu den Dissonanzen gezählt, der Ditonus aber, also die große Terz mit dem Verhältnis **4:5** die zum siebenten Grad führt, zu den Konsonanzen.

Dennoch kann daraus nicht der achte Grad als Beginn der Dissonanzen festgelegt werden; denn in ihm befinden sich auch die Verhältnisse **5:6** und **5:8**, die nicht zu den Dissonanzen gerechnet werden.

§. 15. Für jemanden, der diese Sache eingehender überlegt, wird feststehen, dass die Theorie der Dissonanzen und Konsonanzen nicht nur in der Einfachheit der Wahrnehmung zu suchen ist, sondern dass man auch auf die Gesamtheit der Verhältnisse des Komponierens blicken muss. Denn die Konsonanzen, die in Zusammenklängen weniger günstig angewendet werden können, bezeichnet man mit dem Namen Dissonanz, auch wenn sie vielleicht einfacher wahrgenommen werden können als andere die zu den Konsonanzen gezählt werden.

Und das ist der Grund, warum **8:9** zu den Dissonanzen gerechnet wird und andere weit komplexere Konsonanzen für Konsonanzen gehalten werden.

Auf ähnliche Weise ist daraus zu erklären, warum die Quart (oder griechisch Diatessaron), die aus Tönen im Verhältnis **3:4** besteht, von den Musikern eher zu den Dissonanzen als zu den Konsonanzen gezählt wird, obwohl aber kein Zweifel daran besteht, dass sie ziemlich einfach wahrgenommen werden kann.

§. 16. Bei den antiken Autoren freilich wurde diese Quart gleich wie eine sehr angenehme Konsonanz betrachtet, wie aus ihren Schriften klar wird. Aber sie verwendeten gänzlich andere Methoden, Dissonanzen von Konsonanzen zu unterscheiden, die in der Natur der Sache selbst weniger begründet waren und aus zweifelhaften Prinzipien abgeleitet wurden.

Denn die Pythagoräer werteten zur Erzeugung von Konsonanzen keine anderen Klänge für geeignet, als solche, die aus zwei Tönen mit multiplikativem oder überteiligem oder multiplikativ-überteiligem Verhältnis bestehen; sie meinten aber, dass eine Dissonanz entstehe, wenn das Verhältnis dieser beiden Töne übermehrteilig oder multiplikativ-übermehrteilig sei.

§. 17. Diesen Pythagoräischen Lehrsatz widerlegte Ptolemäus in seinen „*Libri Harmonicorum*“ indem er als Beispiel anführte, dass Diapason plus Diatessaron, das durch das Verhältnis **3:8** bestimmt wird, eine Konsonanz sei, obwohl dieses Verhältnis das doppelte und zweidrittelfache ist.

Hierauf merkt er an, dass diese Regel freilich nicht einmal die Pythagoräer selbst anzuwenden gewagt hätten, weil sie außer dem Doppelten, Dreifachen, Vierfachen, Eineinhalbfachen und Eineindrittelfachen keine anderen Verhältnisse verwendeten um Konsonanzen zu erzeugen, obwohl sie aber außerdem unzählige andere mit demselben Recht als ihrer Regel folgend verwenden hätten können.

An dieser Widerlegung des Ptolemäus finde ich nichts einzuwenden; denn es ist notwendig nicht auf die Beschaffenheit des Verhältnisses sondern auf die Einfachheit und Möglichkeit seiner Wahrnehmung zu schauen.

§. 18. Und das Prinzip des Ptolemäus selbst, das er in dieser Sache benutzt, ist aber auch nicht stärker; als Konsonanzen lässt er nach dem Diapason und dem Diadiapason nur zwei zu, die in zwei benachbarten überteiligen Verhältnissen enthalten sind, welche verbunden das doppelte Verhältnis erzeugen. Dieser Art sind die Verhältnisse **2:3** und **3:4**, die gemeinsam das Verhältnis **1:2** ergeben. Aus dem ersten entsteht die Diapente genannte Konsonanz, aus dem zweiten aber das Diatessaron. Darauf stellt er noch dieses andere Prinzip, dass jede beliebige Konsonanz, die um eine Oktave vergrößert wird, eine Konsonanz bleibe und nichts von ihrer Annehmlichkeit verliere, und auf diese Weise nimmt er in die Zahl der Konsonanzen folgende Verhältnisse auf: **1:2**, **1:4**, **2:3**, **1:3**, **3:4** und **3:8**.

§. 19. Nichtsdestoweniger teilte Ptolemäus trotzdem den überteiligen Verhältnissen ein großes Vorrecht vor den übermehrteiligen zu; er nennt nämlich Klänge, die andere überteilige Verhältnisse als **2:3** und **3:4** haben, nicht dissonant, sondern mit einem mittleren Namen zwischen konsonant und dissonant, nämlich gefällig (*concinnus*). Dass die übrigen übermehrteiligen Verhältnisse außer **3:8** Dissonanzen erzeugen, behauptet er fest.

Ich schätze, dass es aber nicht notwendig ist, diese nämlich ganz unsichere und auf keinen starken Prinzipien errichtete Methode, Annehmlichkeit von Konsonanzen zu messen, zu widerlegen: weil die Wahrheit unserer Prinzipien schon genügend vor Augen gestellt ist und aus der Natur der Sache selbst abgeleitet.

Es bliebe freilich noch übrig, dass ich die Meinung einer anderen Gruppe antiker Musiker, deren Gründer Aristoxenos war, über diese Sache darlege, nämlich dass diese die Zahlenverhältnisse völlig zurückwiesen und so die Beurteilung von Konsonanzen und Dissonanzen allein den Sinnen überließen, worin sie nicht viel von den Pythagoräern abwichen.

§. 20. Die Aufzählung der Konsonanzen dreier oder mehrerer Töne wird auf ähnliche Art geschehen wie die zweier Töne, sodass es überflüssig wäre sich so ausführlich über sie zu auszubreiten.

Das nur habe ich beschlossen anzumerken, dass die einfachste Konsonanz dreier Töne zum dritten Grad führt und aus den Klängen **1:2:4** besteht, deren Darstellungszahl (das kleinste gemeinsame Vielfache) **4** ist.

Daraus kann man erkennen, dass eine Konsonanz zu einem umso höheren Grad der Annehmlichkeit führt, aus je mehr Tönen sie gebildet wird, auch wenn sie in ihrer Art die einfachste ist.

§. 21. Umso mehr verfolge ich diese Einteilung der Konsonanzen nicht weiter, weil ich eine andere bei weitem geeignetere und nützlichere Einteilung vorbringen will, nämlich die in vollständige und unvollständige Konsonanzen.

Ich nenne aber eine Konsonanz „vollständig“, wenn zu ihr kein Ton dazugefügt werden kann sodass nicht gleichzeitig die Konsonanz selbst zu einem höheren Grad zu zählen ist, d.h. dass ihre Darstellungszahl komplexer wird; so ist z.B. die Konsonanz, die aus den Tönen **1:2:3:6** besteht, deren Darstellungszahl **6** ist. Wenn man aber einen beliebigen neuen Ton dazugibt, wird die Darstellungszahl größer werden.

Eine „unvollständige“ Konsonanz ist für mich dagegen eine, zu der man einen oder mehrere Töne dazugeben kann, ohne dass die Darstellungszahl vervielfacht wird; so wie die Darstellungszahl der Konsonanz **1:2:3** nicht größer ist wenn der Ton **6** hinzugefügt wird, deswegen nenne ich diese Konsonanz unvollständig.

§. 22. Aus dem Vorhergehenden versteht man aber, dass jede beliebige einen Einzelton bezeichnende Zahl ein Teiler der Darstellungszahl der Konsonanz ist. Wenn daher alle Teiler der Darstellungszahl genommen und mit ihnen Einzeltöne ausgedrückt werden, wird man eine vollständige Konsonanz jener Darstellungszahl erhalten; denn außer diesen Zahlen wird es keine geben, die diese Darstellungszahl teilt.

So wird die Konsonanz vollständig sein, die aus den Tönen **1:2:3:4:6:12** besteht, weil nur diese Zahlen Teiler der Darstellungszahl dieser Konsonanz sind die **12** ist, und keine andere außer diesen Zahlen **12** teilt.

§. 23. Sooft daher die Darstellungszahl einer Konsonanz eine Primzahl ist, wird die vollständige Konsonanz eine aus zwei Tönen sein, wie **1:a** wenn **a** die Primzahl bezeichnet. Wenn die Darstellungszahl a^m ist, wird die vollständige Konsonanz aus **m + 1** Tönen bestehen, nämlich **1:a:a²:a³-----a^m**.

Hat die Darstellungszahl die Form **ab**, gebildet aus zwei Primzahlen, wird die (vollständige) Konsonanz eine aus vier Tönen sein, **1:a:b:ab**, und bei gegebener Darstellungszahl $a^m b^n$ wird die vollständige Konsonanz **mn + m + n + 1** Töne haben. Und wenn die Darstellungszahl allgemeiner $a^m b^n c^p$ ist, wird die vollständige Konsonanz **(m + 1)(n + 1)(p + 1)** Töne enthalten und nach der in §. 6. gegebenen Regel zum Grad **ma + nb + pc – m – n – p + 1** führen: die Summe aller einfachen Faktoren des Exponenten ist nämlich **ma + nb + pc** und die Anzahl der Faktoren ist **m + n + p**.

§. 24. Aus der dargelegten Art vollständige Konsonanzen zu bilden ist ersichtlich, dass eine solche Konsonanz unvollständig wird wenn ein oder mehrere Töne von ihr ausgelassen werden.

Dazu ist zu bemerken, dass man Töne solchermaßen auslassen kann, dass die Darstellungszahl der übrigen nicht einfacher wird: Wenn man so aus der Konsonanz **1:2:4**, deren Darstellungszahl **4** ist, den Ton **1** oder **4** ausließe, würde eine

Konsonanz **1:2** oder **2:4**, mit jener kongruent, entstehen, deren Darstellungszahl nicht länger **4** wäre, sondern nur **2**.

Aber den mittleren Ton **2** kann man auslassen; denn von der Konsonanz **1:4** ist die Darstellungszahl nun **4**, wie von der vollständigen **1:2:4**.

§. 25. Wenn die Darstellungszahl eine Primzahl ist, kann die Konsonanz offensichtlich nicht unvollständig sein, weil sie aus nur zwei Tönen besteht. Aber die übrigen Konsonanzen können alle unvollständig werden, nämlich als Zweiklänge, indem man alle auslässt außer dem tiefsten und dem höchsten: Weil man nämlich letzteren durch die Darstellungszahl selbst, ersteren durch die Eins ausdrückt, wird die Darstellungszahl dieser Konsonanz aus zwei Tönen nicht einfacher sein als die der vollständigen; so wie die Darstellungszahl der aus der Konsonanz **1:2:3:6** durch Auslassen der Töne **2** und **3** entstandenen **1:6** gleich **6** sein wird, genauso wie die der ersteren.

Ferner können in Konsonanzen, deren Darstellungszahl der Form a^m ist, weder der tiefste Ton **1** noch der höchste a^m ausgelassen werden; aber bei allen übrigen Konsonanzen kann sowohl der tiefste als auch der höchste und auch beide weggelassen werden.

§. 26. Wenn eine Konsonanz so gebildet ist, dass in ihr kein Ton ausgelassen werden kann ohne dass sie sofort eine einfachere Konsonanz wird und zu einem niedrigeren Grad als die vorige führt, werden wir sie hier „rein“ nennen. Solcher Art sind alle Zweiklänge, weil sie ja durch Auslassen eines Tons aufhören Konsonanz zu sein. Auf ähnliche Weise sind reine Konsonanzen **3:4:5**, **4:5:6**, und auch **1:6:9**, **2:3:12**, in denen kein Ton ausgelassen werden kann ohne dass sie einfacher werden. Daher besteht der Nutzen dieser Konsonanzen darin, dass die Zahl der Töne so weit wie möglich verringert ist so dass die Darstellungszahl trotzdem nicht kleiner wird.

§. 27. Auf zweifache Art aber kann jede beliebige Konsonanz durch Weglassen eines oder mehrerer Töne einfacher werden; die erste ist, wenn das kleinste gemeinsame Vielfache der übrigen Töne, d.h. der Zahlen die sie repräsentieren, kleiner wird als das aller Töne; wie in der Konsonanz **2:3:5:6** nach Weglassen des Tons **5** das kleinste gemeinsame Vielfache der restlichen **2:3:6** nun **6** ist, das vorher **30** war.

Auf eine zweite Weise wird eine Konsonanz einfacher, wenn die übrigen Töne einen gemeinsamen Teiler haben; dann nämlich sollen sie durch diesen zuerst dividiert werden, wie das kleinste gemeinsame Vielfache (d.h. die Darstellungszahl) definiert ist; wie in der Konsonanz **2:3:4:6** nach Weglassen des Tons **3** die übrigen, durch **2** geteilt, die Konsonanz **1:2:3** bilden, deren Darstellungszahl **6** ist, vorher aber **12** war.

§. 28. Auch kann auf beide Arten zusammen eine Konsonanz durch Weglassen eines oder mehrerer Töne einfacher werden; wenn nämlich die Zahlen der übrigen Töne ein kleinstes gemeinsames Vielfaches und darüber hinaus noch einen gemeinsamen Teiler haben:

So geschieht das in der Konsonanz **3:6:8:9:12** – deren Darstellungszahl **72** ist – wenn der Ton **8** weggelassen wird; denn das kleinste gemeinsame Vielfache der übrigen **3:6:9:12** ist **36**; und weil diese Zahlen alle durch **3** geteilt werden können, ist die sich ergebene Konsonanz mit **1:2:3:4** zu zählen, deren Darstellungszahl daher **12** sein wird. Um soviel einfacher wird also die vorgelegte Konsonanz durch Weglassen des einzigen Tons **8**.

§. 29. Damit man aber genauer versteht, auf welche Weise jede beliebige vorgelegte Konsonanz einfacher gemacht werden kann, wollen wir eine vollständige Konsonanz betrachten, deren Darstellungszahl $a^m P$ ist, wo **P** die Größe ist, die alle Primfaktoren außer **a** umfasst.

Wenn in dieser also alle durch a^m und seine Vielfachen ausgedrückten Töne weggelassen werden, wird eine einfachere Konsonanz der Darstellungszahl $a^{m-1}P$ übrig bleiben, welche Reduktion nach der ersten Art gemacht ist.

Auf die zweite Art aber wird die Konsonanz einfacher werden, wenn alle Töne weggelassen werden, die durch Zahlen ausgedrückt werden die **a** nicht in sich enthalten: Dann nämlich können die übrigen Töne alle durch **a** dividiert werden, und ihre Darstellungszahl wird $a^{m-1}P$ sein.

Daraus versteht man, wie auf beide Arten gemeinsam eine Konsonanz vereinfacht werden kann.

§. 30. Der Unterschied, den das Gehör zwischen vollständigen und unvollständigen Konsonanzen wahrnimmt, besteht verständlicherweise darin, dass es die vollständigen viel genauer, die unvollständigen aber weniger genau erfasst. Wenn allerdings alle Töne zugleich das Hörorgan erregen, müssen sich die Verhältnisse der einzelnen zueinander der Wahrnehmung deutlicher anbieten, als wenn man die Darstellungszahl aus weniger Tönen erhalten muss. So wird aus der Konsonanz **1:2:3:6** ihre Darstellungszahl, die **6** ist, um vieles deutlicher erkannt als aus den nur zwei Tönen **1:6**. Dazu ist es aber erforderlich, dass alle Töne möglichst exakt den Zahlen entsprechen, die sie ausdrücken.

§. 31. Mir schien aber passend, folgende Tabelle aller vollständigen Konsonanzen anzufügen, die in den ersten zwölf Graden enthalten sind, in ihr bezeichnen die römischen Zahlen die Grade, die arabischen aber alle Konsonanzen, die zu diesem Grad gehören.

I.	1.
II.	1:2.
III.	1:3. 1:2:4.
IV.	1:2:3:6. 1:2:4:8.
V.	1:5. 1:3:9. 1:2:3:4:6:12. 1:2:4:8:16.
VI.	1:2:5:10. 1:2:3:6:9:18. 1:2:3:4:6:8:12:24. 1:2:4:8:16:32.
VII.	1:7. 1:3:5:15. 1:2:4:5:10:20. 1:3:9:27. 1:2:3:4:6:9:12:18:36. 1:2:3:4:6:8:12:16:24:48. 1:2:4:8:16:32:64.
VIII.	1:2:7:14. 1:2:3:5:6:10:15:30. 1:2:4:5:8:10:20:40. 1:2:3:6:9:18:27:54. 1:2:3:4:6:9:12:18:24:36:72. 1:2:3:4:6:8:12:16:24:32:48:96. 1:2:4:8:16:32:64:128.
IX.	1:3:7:21. 1:5:25. 1:2:4:7:14:28. 1:3:5:9:15:45. 1:2:3:4:5:6:10:12:15:20:30:60. 1:2:4:5:8:10:16:20:40:80. 1:3:9:27:81. 1:2:3:4:6:9:12:18:27:36:54:108. 1:2:3:4:6:8:9:12:16:18:24:36:48:72:144. 1:2:3:4:6:8:12:16:24:32:48:64:96:192. 1:2:4:8:16:32:64:128:256.

X.	1:2:3:6:7:14:21:42. 1:2:5:10:25:50. 1:2:4:7:8:14:28:56. 1:2:3:5:6:9:10:15:18:30:45:90. 1:2:3:4:5:6:8:10:12:15:20:24:30:40:60:120. 1:2:4:5:8:10:16:20:32:40:80:160. 1:2:3:6:9:18:27:54:81:162. 1:2:3:4:6:8:9:12:18:24:27:36:54:72:108:216. 1:2:3:4:6:8:12:16:18:24:32:36:48:72:96:144:288. 1:2:3:4:6:8:12:16:24:32:48:64:96:128:192:384. 1:2:4:8:16:32:64:128:256:512.
XI.	1:11. 1:5:7:35. 1:3:7:9:21:63. 1:3:5:15:25:75. 1:2:3:4:6:7:12:14:21:28:42:84. 1:2:4:5:10:20:25:50:100. 1:2:4:7:8:14:16:28:56:112. 1:3:5:9:15:27:45:135. 1:2:3:4:5:6:9:10:12:15:18:20:30:45:60:90:180. 1:2:3:4:5:6:8:10:12:15:16:20:32:40:48:60:80:120:240. 1:3:9:27:81:243. 1:2:4:5:8:10:16:20:32:40:64:80:160:320. 1:2:3:4:6:9:12:18:27:36:54:81:108:162:324. 1:2:3:4:6:8:9:12:16:18:24:27:36:48:54:72:108:144:216:432. 1:2:3:4:6:8:9:12:16:18:24:32:36:48:64:72:96:144:192:288: 576. 1:2:3:4:6:8:12:16:24:32:48:64:96:128:192:256:384:768. 1:2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024.
XII.	1:2:11:22. 1:2:5:7:10:14:35:70. 1:2:3:6:7:9:14:21:28:42:63:126. 1:2:3:5:6:10:15:25:30:50:75:150. 1:2:3:4:6:7:8:12:14:21:24:28:42:56:84:168. 1:2:4:5:8:10:20:25:40:50:100:200. 1:2:4:7:8:14:16:28:32:56:112:224. 1:2:3:5:6:9:10:15:18:27:30:45:54:90:135:270. 1:2:3:4:5:6:8:10:12:15:18:20:24:30:36:40:45:60:72:80:120:180:360. 1:2:3:4:5:6:8:10:12:15:16:20:24:30:32:40:48:60:80:96:120:240:480. 1:2:3:6:9:18:27:54:81:162:243:486. 1:2:4:5:8:10:16:20:32:40:64:80:128:160:320:640. 1:2:3:4:6:8:9:12:18:24:27:36:54:72:81:108:162:216:324:648. 1:2:3:4:6:8:9:12:16:18:24:27:32:36:48:54:72:96:108:144:288:432:864. 1:2:3:4:6:8:9:12:16:18:24:32:36:48:64:72:96:128:144:192:288:384:566:1152. 1:2:3:4:6:8:12:16:24:32:48:96:128:192:256:284:512:768:1536. 1:2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024:2048.

§. 32. Obwohl sich aber eine vollständige Konsonanz dem Gehör viel deutlicher zeigt als eine unvollständige, werden vollständige Konsonanzen nicht verwendet wenn sie zu komplex sind.

Erstens nämlich betäubt eine so große Anzahl an Tönen die Ohren eher mit verworrenem Getöse als mit deutlicher Harmonie, wenn die Musikinstrumente nicht ganz genau gestimmt sind, was nie bewerkstelligt werden kann.

Zweitens können auch mehrere Töne entweder wegen zu großer Tiefe oder zu großer Höhe nicht einmal wahrgenommen werden; denn im ersten Kapitel wurde schon gezeigt, dass kein Klang von den Ohren wahrgenommen werden kann, der in der Sekunde weniger als **30** oder mehr als **7500** Pulse von sich gibt. Daraus ist ersichtlich, dass nicht einmal alle Klänge einer Konsonanz gehört werden können, sooft die äußersten Töne ein größeres Verhältnis als **1:250** besitzen.

§. 33. Es ist günstig, die Lehre von den Konsonanzen auf das zurückzuführen, was die Musiker gewöhnlich über die Intervalle der Töne lehren. „Intervall“ wird nämlich der Abstand genannt, der zwischen zwei Tönen, einem tieferen und einem höheren, erfasst wird. Umso größer ist also ein Intervall, je mehr sich die tiefen und hohen Töne im Verhältnis unterscheiden, d.h. je größer das Verhältnis ist, das der höhere zum tieferen besitzt.

So ist das Intervall der Töne **1:3** größer als das der Töne **1:2**; und von gleichen Tönen **1:1** ist das Intervall null, weil man vom einen zum anderen durch keinen Sprung gelangt. Daraus versteht man, dass das Intervall so definiert werden soll, dass es ein Maß für den Unterschied zwischen dem höheren und dem tieferen Ton ist.

§. 34. Seien drei beliebige Töne **a:b:c**, von denen **c** der höchste, **a** der tiefste, **b** aber der mittlere sei; aus der vorangegangenen Definition wird klar sein, dass das Intervall der Töne **a** und **c** die Zusammensetzung der Intervalle zwischen **a** und **b** und zwischen **b** und **c** ist.

Wenn daher diese zwei Intervalle zwischen **a** und **b** und zwischen **b** und **c** gleich sind, was eintritt wenn **a:b = b:c** ist, dann wird das Intervall **a:c** um das Doppelte größer sein als das Intervall **a:b** oder **b:c**. Daraus erkennt man, dass das Intervall **1:4** um das Doppelte größer ist als das Intervall **1:2**, und dass deswegen, weil man festsetzt dass dieses Verhältnis **1:2** die Oktave bestimmt, das Verhältnis **1:4** zwei Oktaven umfasst.

§. 35. Wer das genauer betrachtet, wird leicht verstehen, dass die Intervalle durch Maße der Beziehungen ausgedrückt werden müssen, welche die Töne bestimmen.

Die Beziehungen werden aber durch Logarithmen der Brüche gemessen, deren Zähler die höheren Töne bezeichnen, die Nenner aber die tieferen.

Deshalb muss das Intervall zwischen den Tönen **a:b** durch den Logarithmus des Bruchs $\frac{b}{a}$ ausgedrückt werden, den man üblicherweise $l\left(\frac{b}{a}\right)$ schreibt, oder, was dasselbe ergibt, $l\,b - l\,a$.

Also wird ein Intervall gleicher Töne (**a:a**) null sein wie wir schon angemerkt haben, weil es ja durch $l\,a - l\,a = 0$ ausgedrückt wird.

§. 36. Daher muss das Intervall, das Oktav, griechisch **διαπασων** benannt wird, durch den Logarithmus der Zwei ausgedrückt werden, weil es von Tönen die das doppelte Verhältnis haben gebildet wird; und das Intervall der Töne **2:3**, das man Quint oder **διαπεντε** nennt, wird $l\left(\frac{3}{2}\right)$ sein, oder $l\,3 - l\,2$.

Daraus erkennt man, dass diese Intervalle untereinander völlig unvergleichbar sind; auf keine Art nämlich kann man eine rationale Beziehung angeben die $l\,2$ zu

$l\left(\frac{3}{2}\right)$ hat, und deswegen gibt es kein auch noch so kleines Intervall, das zugleich ein aliquoter Teil der Oktav und der Quint ist.

Ähnlich ist die Beziehung aller anderen Intervalle, die durch ungleiche Logarithmen ausgedrückt werden, wie $l\left(\frac{3}{2}\right)$ und $l\left(\frac{5}{4}\right)$.

Hingegen werden Intervalle miteinander verglichen werden können, die durch Logarithmen von Zahlen ausgedrückt werden, die Potenzen derselben Basis sind; so wird sich das Intervall der Töne **27:8** zum Intervall der Töne **9:4** so verhalten wie **3** zu **2**; denn $l\left(\frac{27}{8}\right) = 3l\left(\frac{3}{2}\right)$ und $l\left(\frac{9}{4}\right) = 2l\left(\frac{3}{2}\right)$.

§. 37. Daraus wird leicht klar, welche Intervalle durch Addition und Subtraktion von mehreren miteinander entstehen, indem man diese Operationen in den Logarithmen ausführt, die die Maße der Intervalle sind; wenn man das tut wird der resultierende Logarithmus das entstehende Intervall bezeichnen.

Wenn so das Intervall gesucht wird, das übrig bleibt wenn man eine Quint von einer Oktav abzieht, muss man $\log\left(\frac{3}{2}\right)$, d.h. $l\,3 - l\,2$ abziehen von $\log(2)$ und der Rest wird $l\,2 - l\,3 + l\,2$ sein, das ist $2l\,2 - l\,3$.

Aber $2l\,2 = l\,4$; daher wird das restliche Intervall $l\,4 - l\,3$ sein, oder $l\left(\frac{4}{3}\right)$, was Diatessaron oder Quart genannt wird und gemeinsam mit der Quint eine volle Oktav füllt.

§. 38. Obwohl aber die Logarithmen verschiedener Zahlen nicht miteinander verglichen werden können, wenn sie nicht Potenzen derselben Basis sind, kann man trotzdem mit Hilfe von Logarithmentabellen ein Verhältnis bestimmen, das dem wahren Wert möglichst nahe kommt, und so verschiedene Intervalle miteinander vergleichen soweit das möglich ist.

Wenn also das Maß der Oktav $\log 2$ ist (was man aus den Tabellen mit $\approx 0,3010300$ entnimmt) und das der Quint $\log 3 - \log 2$ (diese Differenz ist $\approx 0,1760913$), wird das Intervall der Oktav sich zum Intervall der Quint ziemlich genau wie **3010300** zu **1760913** verhalten. Dieses Verhältnis soll, um es auf kleinere Zahlen

zurückzuführen, so aufgeschrieben werden: $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}$ zu 1,

woraus folgende einfachen Verhältnisse gewonnen werden können:

2:1, 3:2, 5:3, 7:4, 12:7, und 17:10, 29:17, 41:24, 53:31, deren letztes dem wahren Wert am nächsten ist.

§. 39. Auf ähnliche Weise kann man Intervalle in beliebig viele gleiche Teile teilen und die Töne bestimmen, die dem wahren Wert am nächsten liegen und die voneinander um ein solches Teilintervall entfernt sind.

Denn der Logarithmus des vorgelegten Intervalls ist in genauso viele Teile zu teilen und die einem Teil entsprechende Zahl aus den Tafeln zu entnehmen; diese wird zur Eins das gesuchte Verhältnis haben.

Es sei zum Beispiel ein dreimal kleineres Intervall als die Oktav gesucht; dessen Logarithmus wird freilich $\approx 0,1003433$, der dritte Teil von eben $\log 2$ sein, und dazu gehört wiederum der Bruch **126:100** d.h. **63:50**, was weniger genau ist, oder **29:23**,

oder **5:4** mit welchem letzten man die große Terz beschreibt, die auch von Unwissenden für den dritten Teil einer Oktav gehalten wird.

