Verschiedene Kommata und Intervalle
und die Teilung der Oktav in 53 Teile

Lukas Thenius (2021/22)

Diese Arbeit entstand

> aus der Bewunderung verschiedener musikalischer Systeme,
>
> aus der Muße sich mit einigen dieser Systeme praktisch und theoretisch zu befassen,
>
> aus der persönlichen Aversion gegenüber der Überheblichkeit des eurozentrischen Weltbilds, im Besitz der (einzigen) Wahrheit zu sein.

Ich habe hier keine grundlegend neuen Erkenntnisse dargelegt, aber für mich selbst und für alle Interessierten möglichst übersichtlich einige Zusammenhänge dargestellt.

Bei aller Faszination, die die beschriebenen Zahlenverhältnisse auf mich ausüben, bin ich mir der Tatsache bewusst, dass das Wesen der Musik und des Musizierens durch die Zahlen allein bei Weitem nicht erfasst werden kann.

Viele der besten Musikerinnen und Musiker verschiedener Kulturen kennen möglicherweise die musiktheoretischen Einzelheiten gar nicht so genau, sondern lassen sich durch ihre reiche Erfahrung und durch ihre Offenheit für Inspiration leiten.

Und nur so kann Musik entstehen!

I. Grundlegendes

In der Musiktheorie finden mindestens zwei Methoden der Berechnung von Intervallen Anwendung:

- multiplikative Verhältnisse zwischen den Frequenzen zweier (oder mehrerer) Töne
- additive Beziehungen zwischen Logarithmen dieser Verhältnisse

Grundlage der multiplikativen Verhältnisse ist vor allem die Obertonreihe, das heißt die Reihe der ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz, also F, 2F, 3F, 4F, 5F,...
Zwischen zwei Teiltönen der Obertonreihe treten demnach ganzzahlige Verhältnisse auf.
Das gleiche (nicht notwendigerweise ganzzahlige) Frequenzverhältnis zweier Töne wird von uns als das gleiche Intervall wahrgenommen.

Z.B. hören wir 200 Hz : 100 Hz = 880 Hz : 440 Hz = 2468 Hz : 1234 Hz = 2:1 als Oktav,
150 Hz : 100 Hz = 660 Hz : 440 Hz = 1851 Hz : 1234 Hz = 3:2 als Quint und
125 Hz : 100 Hz = 550 Hz : 440 Hz = 1542,5 Hz : 1234 Hz = 5:4 als große Terz.
Dabei bedeutet die Frequenz von 1 Hertz (Hz) eine Schwingung pro Sekunde.

Intervalle werden durch **Multiplikation der Frequenzverhältnisse** miteinander kombiniert,
also ergibt z.B. eine Oktav (2) und eine Quint (3/2) zusammen eine Duodezim 2·(3/2) = 3.

Eine andere Darstellung der Intervalle ergibt sich durch Logarithmen der Frequenzverhältnisse.
Üblich ist dafür die Einteilung der Oktav in 12 gleiche Halbtöne (gleichstufig temperierte Stimmung), von denen wieder jeder als *100* Cent (¢) definiert wird.

So hat dann die Oktav (Frequenzverhältnis 2) *1200 ¢*
die Quint (Frequenzverhältnis 3/2) *701,9 ¢*
die gleichstufig temperierte Quint *700 ¢*
die pythagoräische große Terz (Frequenzverhältnis 81/64) *407*,8 *¢*
die gleichstufig temperierte große Terz *400 ¢*
die große Terz (Frequenzverhältnis 5/4) *386,3 ¢.*

Intervalle werden durch **Addition der Centmaße** miteinander kombiniert,
also ergibt z.B. eine Oktav (*1200 ¢*) und eine Quint (*700* bzw. *701,9 ¢*) zusammen eine Duodezim (*1900* bzw. *1901,9 ¢*).

Ein gegebenes Verhältnis **C** (C > 0) kann man in einen Centwert folgendermaßen umrechnen:

$$\mathbf{[C]} = \boldsymbol{c} = \mathbf{1200 \cdot {}_2log(C) = 1200 \cdot log(C)/log(2)} \qquad \text{Einheit Cent (¢)}$$

z.B.: C = 5/4 (große Terz)

→ $[5/4] = 1200 \cdot \log(5/4)/\log(2) = \mathit{386{,}3137139}$ *¢*

Umgekehrt erhält man bei gegebenem Centmaß ***c*** bzw. **[C]** das Frequenzverhältnis durch:

$$\mathbf{C = 2^{c/1200} = 2^{[C]/1200}}$$

z.B.: [C] = *c* = *600 ¢* (gleichstufig temperierter Tritonus)

→ $C = 2^{600/1200} = 2^{1/2} = \sqrt{2} = 1{,}414214$

In dieser Zusammenstellung werden immer beide Methoden (Verhältnisse und Logarithmen) gemeinsam verwendet.

Definitionsgemäß gilt:

$$[A \cdot B] = [A] + [B]$$
$$[A/B] = [A] - [B]$$
$$[A/A] = [A] - [A] = \mathit{0}\ ¢$$
$$[A^x] = x \cdot [A]$$
$$[A^{-1}] = -[A]$$

II. Kommata

Beim Vergleichen zweier sehr ähnlicher Intervalle treten sehr kleine Intervalle auf, die oft „Kommata“ genannt werden. Diese Intervalle haben **Frequenzverhältnisse nahe der 1** und daher **Logarithmen nahe *0 ¢***.

Beispielsweise ist der Unterschied zwischen den beiden Terzen, die durch 5/4 bzw. 81/64 beschrieben werden, das „Syntonische Komma“:

$$\Psi = (81/64)/(5/4) = 3^4/(2^4 \cdot 5) = 81/80 \qquad [\Psi] = \psi = \mathit{21{,}5062896}\ ¢$$

und der Unterschied zwischen der gleichstufig temperierten Quint und der durch das Frequenzverhältnis 3/2 beschriebenen Quint die zwölfte Wurzel (bzw. ein Zwölftel in der logarithmischen Darstellung) des „Pythagoräischen Kommas“:

$$P = 3^{12}/2^{19} \qquad [P] = p = \mathit{23{,}4600104}\ ¢$$
$$P^{1/12} = 3/2^{19/12} \qquad [P]/12 = p/12 = \mathit{1{,}9550009}\ ¢$$

Je nachdem, welche Teiltöne der Naturtonreihe bzw. welche Frequenzverhältnisse man als Bausteine zulässt, erhält man unterschiedliche Systeme von Intervallen.

III. Intervalle, die man durch Potenzen der 2 und der 3 darstellen kann

Eine Methode, die schon weitreichende Möglichkeiten eröffnet, nimmt für die Bildung der Intervalle zunächst nur **die ersten drei Teiltöne der Naturtonreihe: F, 2F, 3F**.
Zwischen erstem und zweiten, bzw. zwischen zweitem und drittem Teilton ergeben sich die Oktav und die Quint:

O = 2 [O] = *1200,0000000*
Qui = 3/2 [Qui] = *701,9550009*

Zwischen einer Quint und einer Oktav ergibt sich die Quart:

Qua = $2/(3/2) = 2^2/3$ [Qua] = *498,0449991*

Zwischen einer Oktav und zwei Quinten ergibt sich der Tonus („Ganzton“):

T = $(3/2)^2/2 = 3^2/2^3$ [T] = *203,9100017*

Zwischen zwei Ganztönen und einer Quart ergibt sich das Semitonium („Halbton“):

S = $(2^2/3)/(3^2/2^3)^2 = 2^8/3^5$ [S] = *90,2249957*

Zwischen drei Ganztönen und einer Quint ergibt sich ebenfalls ein Semitonium:

S = $(3/2)/(3^2/2^3)^3 = 2^8/3^5$ [S] = *90,2249957*

Die Modi des gregorianischen Chorals sind aus diesen Toni und Semitonia aufgebaut, (https://imslp.org/wiki/Micrologus_(D'Arezzo%2C_Guido))

Folgender Tonvorrat wird für die Bildung der Modi verwendet:

a S ♭ (b molle) T **c**

Γ T **A** T **B** S **C** T **D** T **E** S **F** T **G** T **a** **c** T **d** .....

a T ♮ (b durum) S **c**

Zwischen diesen Töne ergeben sich daher theoretisch folgende Intervalle:

	Γ	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**a**	**b** molle	**b** durum	**c**	**d**
d	1/3	3/8	27/64	4/9	1/2	9/16	16/27	2/3	3/4	64/81	27/32	8/9	1
c	3/8	27/64	243/512	1/2	9/16	81/128	2/3	3/4	27/32	8/9	243/256	1	9/8
b durum	32/81	4/9	1/2	128/243	16/27	2/3	512/729	64/81	8/9	(20482187)	1	256/243	32/27
b molle	27/64	243/512	(2187/4096)	9/16	81/128	729/1024	3/4	27/32	243/256	1	(2048/2187)	9/8	81/64
a	4/9	1/2	9/16	16/27	2/3	3/4	64/81	8/9	1	256/243	9/8	32/27	4/3
G	1/2	9/16	81/128	2/3	3/4	27/32	8/9	1	9/8	32/27	81/64	4/3	3/2
F	9/16	81/128	729/1024	3/4	27/32	243/256	1	9/8	81/64	4/3	729/256	3/2	27/16
E	16/27	2/3	3/4	64/81	8/9	1	256/243	32/27	4/3	1024/729	3/2	128/81	16/9
D	2/3	3/4	27/32	8/9	1	9/8	32/27	4/3	3/2	128/81	27/16	16/9	2
C	3/4	27/32	243/256	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	16/9	243/128	2	9/4
B	64/81	8/9	1	256/243	32/27	4/3	1024/729	128/81	16/9	(4096/2187)	2	512/243	64/27
A	8/9	1	9/8	32/27	4/3	3/2	128/81	16/9	2	512/243	9/4	64/27	8/3
Γ	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	16/9	2	9/4	64/27	81/32	8/3	3

	Γ	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**a**	**b** molle	**b** durum	**c**	**d**
d	*-1902,0*	*-1698,0*	*-1494,1*	*-1403,9*	*-1200,0*	*-996,1*	*-905,9*	*-702,0*	*-498,0*	*-407,8*	*-294,1*	*-203,9*	*0,0*
c	*-1698,0*	*-1494,1*	*-1290,2*	*-1200,0*	*-996,1*	*-792,2*	*-702,0*	*-498,0*	*-294,1*	*-203,9*	*-90,2*	*0,0*	*203,9*
b durum	*-1607,8*	*-1403,9*	*-1200,0*	*-1109,8*	*-905,9*	*-702,0*	*-611,7*	*-407,8*	*-203,9*	*(-113,7)*	*0,0*	*90,2*	*294,1*
b molle	*-1494,1*	*-1290,2*	*(-1086,3)*	*-996,1*	*-792,2*	*-588,3*	*-498.0*	*-294,1*	*-90,2*	*0,0*	*(113,7)*	*203,9*	*407,8*
a	*-1403,9*	*-1200,0*	*-996,1*	*-905,9*	*-702,0*	*-498,0*	*-407,8*	*-203,9*	*0,0*	*90,2*	*203,9*	*294,1*	*498,0*
G	*-1200,0*	*-996,1*	*-792,2*	*-702,0*	*-498,0*	*-294,1*	*-203,9*	*0,0*	*203,9*	*294,1*	*407,8*	*498,0*	*702,0*
F	*-996,1*	*-792,2*	*-588,3*	*-498,0*	*-294,1*	*-90,2*	*0,0*	*203,9*	*407,8*	*498,0*	*611,7*	*702,0*	*905,9*
E	*-905.9*	*-702,0*	*-498,0*	*-407,8*	*-203,9*	*0,0*	*90,2*	*294,1*	*498,0*	*588,3*	*702,0*	*792,1*	*996,1*
D	*-702,0*	*-498,0*	*-294,1*	*-203,9*	*0,0*	*203,9*	*294,1*	*498,0*	*702,0*	*792,1*	*905,9*	*996,1*	*1200,0*
C	*-498,0*	*-294,1*	*-90,2*	*0,0*	*203,9*	*407,8*	*498,0*	*702,0*	*905,9*	*996,1*	*1109,8*	*1200,0*	*1403,9*
B	*-294,1*	*-203,9*	*0,0*	*90,2*	*294,1*	*498,0*	*588,3*	*792,1*	*996,1*	*(1086,3)*	*1200,0*	*1290,2*	*1494,1*
A	*-203,9*	*0,0*	*203,9*	*294,1*	*498,0*	*702,0*	*792,1*	*996,1*	*1200,0*	*1290,2*	*1403,9*	*1494,1*	*1698,0*
Γ	*0,0*	*203,9*	*407,8*	*498,0*	*702,0*	*905,9*	*996,1*	*1200,0*	*1403,9*	*1494,1*	*1607,8*	*1698,0*	*1902,0*

Innerhalb einer Oktav treten also – wenn man das Intervall zwischen b molle und b durum vernachlässigt (das wäre die Apotome $A = 3^7/2^{11}$) – neben S, T, Qua und Qui noch auf:

kleine Terz (Semiditonus)	$k3 = Qui/T^2 = 32/27$	$[k3] = [Qui] - 2\cdot[T]$	*= 294,1349974*
große Terz (Ditonus)	$g3 = T^2 = 81/64$	$[g3] = 2\cdot[T]$	*= 407,8200035*
verminderte Quint	$Tr_1 = O/T^3 = 1028/729$	$[Tr_1] = [O] - 3\cdot[T]$	*= 588,2699948*
Tritonus	$Tr_2 = T^3 = 729/512$	$[Tr_2] = 3\cdot[T]$	*= 611,7300052*
kleine Sext	$k6 = Qui\cdot S = 128/81$	$[k6] = [Qui] + [S]$	*= 792,1799965*
große Sext	$g6 = Qui\cdot T = 27/16$	$[g6] = [Qui] + [T]$	*= 905,8650026*
kleine Septim	$k7 = O/T = 16/9$	$[k7] = [O] - [T]$	*= 996,0899983*
große Septim	$g7 = O/S = 243/128$	$[g7] = [O] - [S]$	*= 1109,7750043*

Durch aufsteigende Quinten (· 3/2) bzw. absteigende Quarten (· 3/4) kann man folgende Ordnung („Quintenzirkel“) erhalten:

$$\mathbf{Tr_1 : S : k6 : k3 : k7 : Qua : O : Qui : T : g6 : g3 : g7 : Tr_2}$$

Als für den Zusammenklang (Konkordanz) geeignet werden nur die Intervalle betrachtet, die durch Zahlenverhältnisse mit den kleinsten Nennern beschrieben werden:

Oktav (Diapason)	2	*1200,0*
Quint (Diapente)	3/2	*702,0*
Quart (Diatessaron)	4/3	*498,0*

Hier finden wir auch schon das Pythagoräische Komma **$P = 3^{12}/2^{19}$**:

Wenn wir den Unterschied zwischen Semitonium und Tonus betrachten, erhalten wir die Apotome.

	$A = T/S = 3^7/2^{11}$	$[A] = [T] - [S]$	$= $ *113,6850061*
und:	$A/S = 3^{12}/2^{19} = P$ (Pythagoräisches Komma)	$[A] - [S] = [P]$	$= $ *23,4600104*

außerdem:	$T^6/O = P$	$6\cdot[T] - [O] = [P]$
	$S^{12}/O = P^{-5}$	$12\cdot[S] - [O] = -5\cdot[P]$
	$A^{12}/O = P^7$	$12\cdot[A] - [O] = 7\cdot[P]$

IV. Brüche $3^m/2^n$, die sich der 1 annähern

Niemals kann gelten $3^m = 2^n$ für natürliche Zahlen m, n.
Allerdings kann $3^m/2^n$ der 1 beliebig nahe kommen, es entstehen „Kommata".

Um solche m und n zu gewinnen kann man folgende Gleichung auflösen:

$$3^m = 2^n$$
$$m\cdot\log(3) = n\cdot\log(2)$$
$$m/n = \log(2)/\log(3)$$

Die irrationale Zahl log(2)/log(3) = 0,6309297536... kann man gut durch die Näherungsbrüche ihrer Kettenbruchentwicklung

$$0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{23+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}}}}}}$$

annähern,

das sind
0/1, 1/1, 1/2, 2/3, 5/8, 12/19, 41/65, 53/84, 306/485, 665/1054, 15601/24727, 31867/50508 ......

Man gewinnt dadurch folgende „Kommata“:

Oktav^{-1}	$K_0 = O^{-1} = 1/2$	$[O^{-1}] = -o =$	$-1200{,}0000000$
Quint	$K_1 = Qui = 3/2$	$[Qui] =$	$701{,}9550009$
Quart^{-1}	$K_2 = Qua^{-1} = 3/2^2$	$[Qua^{-1}] =$	$-498{,}0449991$
Tonus	$K_3 = T = 3^2/2^3$	$[T] = t =$	$203{,}9100017$
Semitonium^{-1}	$K_4 = S^{-1} = 3^5/2^8$	$[S^{-1}] = -s =$	$-90{,}2249957$
Pythagoräisches Komma	$K_5 = P = 3^{12}/2^{19}$	$[P] = p =$	$23{,}4600104$
	$K_6 = Q = 3^{41}/2^{65}$	$[Q] = =$	$-19{,}8449645$
	$K_7 = R = 3^{53}/2^{84}$	$[R] = r =$	$3{,}6150459$
	$K_8 = U = 3^{306}/2^{485}$	$[U] = =$	$-1{,}7697352$
	$K_9 = V = 3^{665}/2^{1054}$	$[V] = =$	$0{,}07557548$
	$K_{10} = W = 3^{15601}/2^{24727}$	$[W] = =$	$-0{,}03149909$
	$K_{11} = M = 3^{31867}/2^{50508}$	$[M] = =$	$0{,}01257731$

Es gelten folgende Beziehungen zwischen je drei aufeinanderfolgenden Kommata dieser Reihe:

$O^{-1} \cdot Qui = Qua^{-1}$	$[O^{-1}] + [Qui] = [Qua^{-1}]$
$Qui \cdot Qua^{-1} = T$	$[Qui] + [Qua^{-1}] = [T]$
$Qua^{-1} \cdot T^2 = S^{-1}$	$[Qua^{-1}] + 2 \cdot [T] = [S^{-1}]$
$T \cdot S^{-2} = P$	$[T] + 2 \cdot [S^{-1}] = [P]$
$S^{-1} \cdot P^3 = Q$	$[S^{-1}] + 3 \cdot [P] = [Q]$
$P \cdot Q = R$	$[P] + [Q] = [R]$
$Q \cdot R^5 = U$	$[Q] + 5 \cdot [R] = [U]$
$R \cdot U^2 = V$	$[R] + 2 \cdot [U] = [V]$
$U \cdot V^{23} = W$	$[U] + 23 \cdot [V] = [W]$
$V \cdot W^2 = M$	$[V] + 2 \cdot [W] = [M]$

V. Annäherungen der durch Potenzen von 2 und 3 beschriebenen Intervalle durch das Pythagoräische Komma

Wir betrachten 5 besondere Verhältnisse von Potenzen der 2 und der 3:

$O = 2$	$o = [O] = 1200{,}0000000000$ ¢
$T = 3^2/2^3$	$t = [T] = 203{,}9100017308$ ¢
$S = 2^8/3^5$	$s = [S] = 90{,}2249956731$ ¢
$P = 3^{12}/2^{19}$	$p = [P] = 23{,}4600103846$ ¢
$R = 3^{53}/2^{84}$	$r = [R] = 3{,}6150458655$ ¢

Aus

$T \cdot S^{-2} = P$	$[T] + 2 \cdot [S^{-1}] = [P]$
$S^{-1} \cdot P^3 = Q$	$[S^{-1}] + 3 \cdot [P] = [Q]$
$P \cdot Q = R$	$[P] + [Q] = [R]$

folgt durch Rechnung

$$\mathbf{S = P^4/R} \qquad \boldsymbol{s = 4p - r}$$

$$\mathbf{T = P^9/R^2} \qquad \boldsymbol{t = 9p - 2r}$$

Das Semitonium ist also ca. so groß wie 4, der Tonus ca. wie 9 Pythagoräische Kommata.
Der Unterschied ist r (*3,6150 ¢*) bzw. $2r$ (*7,2301 ¢*).

und mit $O = T^5 \cdot S^2$ ergibt sich — $[O] = 5 \cdot [T] + 2 \cdot [S]$

$$\mathbf{O = P^{53}/R^{12}} \qquad \mathbf{o = 53p - 12r}$$

Die Oktav ist um $12r$ (*43,3806 ¢*) kleiner als $53p$, es gilt also **nicht genau**

$$P = O^{1/53} \qquad p = 1200/53 \text{ (das wäre } 22.6415 \text{ ¢)}$$

sondern

$$P = O^{1/51,15087...} \qquad p = 1200/51,15087.... (23,4600 \text{ ¢})$$

Folgende Intervalle können nun in Erweiterungen des modalen Systems durch Potenzen der 2 und der 3 gebildet und durch das Pythagoräische Komma angenähert werden werden:

Semitonium	$S =$	$2^8/3^5$	$= P^4/R$	$[S] = 4p - r$
Apotome	$A =$	$3^7/2^{11}$	$= P^5/R$	$[A] = 5p - r$
kleiner Ganzton	$S^2 =$	$2^{16}/3^{10}$	$= P^8/R^2$	$[S^2] = 8p - 2r$
großer Ganzton	$T =$	$3^2/2^3$	$= P^9/R^2$	$[T] = 9p - 2r$
kleine Terz	$k3_1 = T \cdot S =$	$2^5/3^3$	$= P^{13}/R^3$	$[k3_1] = 13p - 3r$
kleine Terz	$k3_2 = T \cdot A =$	$3^9/2^{14}$	$= P^{14}/R^3$	$[k3_2] = 14p - 3r$
große Terz	$g3_1 = T \cdot S^2 =$	$2^{13}/3^8$	$= P^{17}/R^4$	$[g3_1] = 17p - 4r$
große Terz	$g3_2 = T^2 =$	$3^4/2^6$	$= P^{18}/R^4$	$[g3_2] = 18p - 4r$
Quart	$Qua =$	$2^2/3$	$= P^{22}/R^5$	$[Qua] = 22p - 5r$
verminderte Quint	$Tr_1 = O/T^3 = Qua \cdot S =$	$2^{10}/3^6$	$= P^{26}/R^6$	$[Tr_1] = 26p - 6r$
Tritonus	$Tr_2 = T^3 = Qua \cdot A =$	$3^6/2^9$	$= P^{27}/R^6$	$[Tr_2] = 27p - 6r$
Quint	$Qui =$	$3/2$	$= P^{31}/R^7$	$[Qui] = 31p - 7r$
kleine Sext	$k6_1 = Qui \cdot S =$	$2^7/3^4$	$= P^{35}/R^8$	$[k6_1] = 35p - 8r$
kleine Sext	$k6_2 = Qui \cdot A =$	$3^8/2^{12}$	$= P^{36}/R^8$	$[k6_2] = 36p - 8r$
große Sext	$g6_1 = Qui \cdot S^2 =$	$2^{15}/3^9$	$= P^{39}/R^9$	$[g6_1] = 39p - 9r$
große Sext	$g6_2 = Qui \cdot T =$	$3^3/2^4$	$= P^{40}/R^9$	$[g6_2] = 40p - 9r$
kleine Septim	$k7_1 = O/T =$	$2^4/3^2$	$= P^{44}/R^{10}$	$[k7_1] = 44p - 10r$
kleine Septim	$k7_2 = O/S^2 =$	$3^{10}/2^{15}$	$= P^{45}/R^{10}$	$[k7_2] = 45p - 10r$
große Septim	$g7_1 = O/A =$	$2^{12}/3^7$	$= P^{48}/R^{11}$	$[g7_1] = 48p - 11r$
große Septim	$g7_2 = O/S =$	$3^5/2^7$	$= P^{49}/R^{11}$	$[g7_2] = 49p - 11r$
Oktav	$O =$	2	$= P^{53}/R^{12}$	$[O] = 53p - 12r$

Mit $B = P^3/R = 2^{27}/3^{17}$ erhalten wir also folgende Intervalle zwischen obigen Intervallen:

| S |P| B |P| S |P| B |P| S | S |P| S | S |P| B |P| S |P| B |P| S |

Durch aufsteigende Quinten ($\cdot$ 3/2) bzw. absteigende Quarten ($\cdot\ 3/2^2$) kann man folgende Ordnung („Quintenzirkel") erhalten:

$\mathbf{S^2 : g6_1 : g3_1 : g7_1 : Tr_1 : S : k6_1 : k3_1 : k7_1 : Qua : O : Qui : T : g6_2 : g3_2 : g7_2 : Tr_2 : A : k6_2 : k3_2 : k7_2}$

VI. Annäherung dieser Intervalle durch gleichstufige Temperaturen

Wenn man den „Fehler“ *r*, 2*r*, 3*r* usw. gleichmäßig aufteilt, kann man statt des Pythagoräischen Kommas das **Holder-Komma** oder **Arabische Komma** verwenden.

$H = 2^{1/53}$ **[H] = *h* = *22,6415094***

Die Quint z.B. wird sehr gut durch 31 Holder-Kommata angenähert:

$Qui/H^{31} = (3/2)/2^{31/53} = (3^{53}/2^{84})^{1/53} = R^{1/53}$ [Qui] – 31*h* = *r*/53 = ***0,0682084 ¢***

$Qui = H^{31} \cdot R^{1/53}$ [Qui] = 31*h* + *r*/53

Wenn allgemein $C = 3^m/2^n \approx 1$, also $3^m \approx 2^n$ dann $3 \approx 2^{n/m}$

und die **Quint 3/2** ≈ $2^{(n/m)-1} = \mathbf{2^{(n-m)/m}}$.

$Qui/2^{(n-m)/m} = (3/2)/2^{(n-m)/m} = 3/2^{1+(n-m)/m} = 3/2^{n/m} = 3^{m/m}/2^{n/m} = C^{1/m}$

Das kann man für alle $3^m/2^n$-Kommata durchführen:

„Komma“ $C = 3^m/2^n$	„Quint“ $2^{(n-m)/m}$			Verhältnis $(3/2)/(2^{(n-m)/m})$	Differenz $[C]/m = c/m$
$Qui = 3^1/2^1$	$2^{0/1}$	=	1	1,5	*701,9550009*
$Qua^{-1} = 3^1/2^2$	$2^{1/1}$	=	2	0,75	*– 498,0449991*
$T = 3^2/2^3$	$2^{1/2}$	=	1,4142135624	1,0606601718	*101,9550009*
$S^{-1} = 3^5/2^8$	$2^{3/5}$	=	1,5157165665	0,9896309331	*– 18,0449991*
$P = 3^{12}/2^{19}$	$2^{7/12}$	=	1,4983070769	1,0011298906	*1,9550009*
$Q = 3^{41}/2^{65}$	$2^{24/41}$	=	1,5004194331	0,9997204561	*– 0,4840235*
$R = 3^{53}/2^{84}$	$2^{31/84}$	=	1,4999409031	1,0000393995	*0,06820841*
$U = 3^{306}/2^{485}$	$2^{179/306}$	=	1,5000050111	0,9999966594	*– 0,005783448*
$V = 3^{665}/2^{1054}$	$2^{389/665}$	=	1,4999999015	1,0000000656	*0,0001136473*
$W = 3^{15601}/2^{24727}$	$2^{9126/156}01$	=	1,5000000017	0,9999999988	*– 0,000002019000*
$M = 3^{31867}/2^{50508}$	$2^{18641/31867}$	=	1,4999999997	1,0000000002	*0,0000003946815*

Wenn man das im Quintenzirkel in beide Richtungen fortsetzt, erhält man für die restlichen Intervalle mit *c* = [C] und *o* = *1200*:

O =	2	[O] = *o*	
Qui =	$2^{(n-m)/m} \cdot C^{1/m}$	[Qui] = *o* · (n-m)/m	+ *c*/m
T =	$2^{(2n-3m)/m} \cdot C^{2/m}$	[T] = *o* · (2n-3m)/m	+ 2*c*/m
$g6_2$ =	$2^{(3n-4m)/m} \cdot C^{.3/m}$	[$g6_2$] = *o* · (3n-4m)/m	+ 3*c*/m
$g3_2$ =	$2^{(4n-6m)/m} \cdot C^{4/m}$	[$g3_2$] = *o* · (4n-6m)/m	+ 4*c*/m
$g7_2$ =	$2^{(5n-7m)/m} \cdot C^{5/m}$	[$g7_2$] = *o* · (5n-7m)/m	+ 5*c*/m
Tr_2 =	$2^{(6n-9m)/m} \cdot C^{6/m}$	[Tr_2] = *o* · (6n-9m)/m	+ 6*c*/m
A =	$2^{(7n-11m)/m} \cdot C^{7/m}$	[A] = *o* · (7n-11m)/m	+ 7*c*/m
$k6_2$ =	$2^{(8n-12m)/m} \cdot C^{8/m}$	[$k6_2$] = *o* · (8n-12m)/m	+ 8*c*/m
$k3_2$ =	$2^{(9m-14n)/m} \cdot C^{9/m}$	[$k3_2$] = *o* · (9n-14m)/m	+ 9*c*/m
$k7_2$ =	$2^{(10n-15m)/m} \cdot C^{10/m}$	[$k7_2$] = *o* · (10n-15m)/m	+ 10*c*/m

$O = 2$	$[O] = o$
$Qua = 2^{(2m-n)/m} \cdot C^{-1/m}$	$[Qua] = o \cdot (2m-n)/m - c/m$
$k7_1 = 2^{(4m-2n)/m} \cdot C^{-2/m}$	$[k7_1] = o \cdot (4m-2n)/m - 2c/m$
$k3_1 = 2^{(5m-3n)/m} \cdot C^{-3/m}$	$[k3_1] = o \cdot (5m-3n)/m - 3c/m$
$k6_1 = 2^{(7m-4n)/m} \cdot C^{-4/m}$	$[k6_1] = o \cdot (7m-4n)/m - 4c/m$
$S = 2^{(8m-5n)/m} \cdot C^{-5/m}$	$[S] = o \cdot (8m-5n)/m - 5c/m$
$Tr_1 = 2^{(10m-6n)/m} \cdot C^{-6/m}$	$[Tr_1] = o \cdot (10m-6n)/m - 6c/m$
$g7_1 = 2^{(12m-7n)/m} \cdot C^{-7/m}$	$[g7_1] = o \cdot (12m-7n)/m - 7c/m$
$g3_1 = 2^{(13m-8n)/m} \cdot C^{-8/m}$	$[g3_1] = o \cdot (13m-8n)/m - 8c/m$
$g6_1 = 2^{(15m-9n)/m} \cdot C^{-9/m}$	$[g6_1] = o \cdot (15m-9n)/m - 9c/m$
$S^2 = 2^{(16m-10n)/m} \cdot C^{-10/m}$	$[S^2] = o \cdot (16m-10n)/m - 10c/m$

Für m = 12 und n = 19 ist $c = p$ und o/m = *100* und es ergibt sich die gängige (12-)gleichstufige Temperatur:

$[S] = o \cdot (8m-5n)/m - 5c/m =$	$100 - 5p/12 =$	*100*	***– 9,775004*** =	*90,224996*
$[A] = o \cdot (7n-11m)/m + 7c/m =$	$100 + 7p/12 =$	*100*	***+ 13,685006*** =	*113,685006*
$[S^2] = o \cdot (16m-10n)/m - 10c/m =$	$200 - 10p/12 =$	*200*	***– 19,550009*** =	*180,449991*
$[T] = o \cdot (2n-3m)/m + 2c/m =$	$200 + 2p/12 =$	*200*	***+ 3,910002*** =	*203,910002*
$[k3_1] = o \cdot (5m-3n)/m - 3c/m =$	$300 - 3p/12 =$	*300*	***– 5,865003*** =	*294,134997*
$[k3_2] = o \cdot (9n-14m)/m + 9c/m =$	$300 + 9p/12 =$	*300*	***+ 17,595008*** =	*317,595008*
$[g3_1] = o \cdot (13m-8n)/m - 8c/m =$	$400 - 8p/12 =$	*400*	***– 15,640007*** =	*384,359993*
$[g3_2] = o \cdot (4n-6m)/m + 4c/m =$	$400 + 4p/12 =$	*400*	***+ 7,820003*** =	*407,820003*
$[Qua] = o \cdot (2m-n)/m - c/m =$	$500 - p/12 =$	*500*	***– 1,955001*** =	*498,044999*
$[Tr_1] = o \cdot (10m-6n)/m - 6c/m =$	$600 - 6p/12 =$	*600*	***– 11,730005*** =	*588,269995*
$[Tr_2] = o \cdot (6n-9m)/m + 6c/m =$	$600 + 6p/12 =$	*600*	***+ 11,730005*** =	*611,730005*
$[Qui] = o \cdot (n-m)/m + c/m =$	$700 + p/12 =$	*700*	***+ 1,955001*** =	*701,955001*
$[k6_1] = o \cdot (7m-4n)/m - 4c/m =$	$800 - 4p/12 =$	*800*	***– 7,820003*** =	*792,179997*
$[k6_2] = o \cdot (8n-12m)/m + 8c/m =$	$800 + 8p/12 =$	*800*	***+ 15,640007*** =	*815,640007*
$[g6_1] = o \cdot (15m-9n)/m - 9c/m =$	$900 - 9p/12 =$	*900*	***– 17,595008*** =	*882,404992*
$[g6_2] = o \cdot (3n-4m)/m + 3c/m =$	$900 + 3p/12 =$	*900*	***+ 5,865003*** =	*905,865002*
$[k7_1] = o \cdot (4m-2n)/m - 2c/m =$	$1000 - 2p/12 =$	*1000*	***– 3,910002*** =	*996,089998*
$[k7_2] = o \cdot (10n-15m)/m + 10c/m =$	$1000 + 10p/12 =$	*1000*	***+ 19,550009*** =	*1019,550009*
$[g7_1] = o \cdot (12m-7n)/m - 7c/m =$	$1100 - 7p/12 =$	*1100*	***– 13,685006*** =	*1086,314994*
$[g7_2] = o \cdot (5n-7m)/m + 5c/m =$	$1100 + 5p/12 =$	*1100*	***+ 9,775004*** =	*1109,775004*

Für m = 53 und n = 84 ist C = R, $c = r$ und o/m = h und es ergibt sich:

$[S] = o \cdot (8m-5n)/m - 5c/m =$	$4h - 5r/53 =$	$4h$	***– 0,341042*** =	*90,224996*
$[A] = o \cdot (7n-11m)/m + 7c/m =$	$5h + 7r/53 =$	$5h$	***+ 0,477459*** =	*113,685006*
$[S^2] = o \cdot (16m-10n)/m - 10c/m =$	$8h - 10r/53 =$	$8h$	***– 0,682084*** =	*180,449991*
$[T] = o \cdot (2n-3m)/m + 2c/m =$	$9h + 2r/53 =$	$9h$	***+ 0,136417*** =	*203,910002*
$[k3_1] = o \cdot (5m-3n)/m - 3c/m =$	$13h - 3r/53 =$	$13h$	***– 0,204625*** =	*294,134997*
$[k3_2] = o \cdot (9n-14m)/m + 9c/m =$	$14h + 9r/53 =$	$14h$	***+ 0,613876*** =	*317,595008*
$[g3_1] = o \cdot (13m-8n)/m - 8c/m =$	$17h - 8r/53 =$	$17h$	***– 0,545667*** =	*384,359993*
$[g3_2] = o \cdot (4n-6m)/m + 4c/m =$	$18h + 4r/53 =$	$18h$	***+ 0,272834*** =	*407,820003*

[Qua] $= o \cdot (2m-n)/m - c/m = \quad 22h - r/53 = \quad 22h \quad \mathbf{- 0{,}068208} = \quad 498{,}044999$
[Tr$_1$] $= o \cdot (10m-6n)/m - 6c/m = \quad 26h - 6r/53 = 26h \quad \mathbf{- 0{,}409250} = \quad 588{,}269995$
[Tr$_2$] $= o \cdot (6n-9m)/m + 6c/m = \quad 27h + 6r/53 = 27h \quad \mathbf{+ 0{,}409250} = \quad 611{,}730005$
[Qui] $= o \cdot (n-m)/m + c/m = \quad 31h + r/53 = \quad 31h \quad \mathbf{+ 0{,}068208} = \quad 701{,}955001$
[k6$_1$] $= o \cdot (7m-4n)/m - 4c/m = \quad 35h - 4r/53 = 35h \quad \mathbf{- 0{,}272834} = \quad 792{,}179997$
[k6$_2$] $= o \cdot (8n-12m)/m + 8c/m = \quad 36h + 8r/53 = 36h \quad \mathbf{+ 0{,}545667} = \quad 815{,}640007$
[g6$_1$] $= o \cdot (15m-9n)/m - 9c/m = \quad 39h - 9r/53 = 39h \quad \mathbf{- 0{,}613876} = \quad 882{,}403992$
[g6$_2$] $= o \cdot (3n-4m)/m + 3c/m = \quad 40h + 3r/53 = 40h \quad \mathbf{+ 0{,}204625} = \quad 905{,}865003$
[k7$_1$] $= o \cdot (4m-2n)/m - 2c/m = \quad 44h - 2r/53 = 44h \quad \mathbf{- 0{,}136417} = \quad 996{,}089998$
[k7$_2$] $= o \cdot (10n-15m)/m + 10c/m = \quad 45h + 10r/53 = 45h \quad \mathbf{+ 0{,}682084} = \quad 1019{,}550008$
[g7$_1$] $= o \cdot (12m-7n)/m - 7c/m = \quad 48h - 7r/53 = 48h \quad \mathbf{- 0{,}477459} = \quad 1086{,}314994$
[g7$_2$] $= o \cdot (5n-7m)/m + 5c/m = \quad 49h + 5r/53 = 49h \quad \mathbf{+ 0{,}341042} = \quad 1109{,}775004$

So kann man durch Teilung der Oktav in gleiche Teile verschiedene Annäherungen der durch Potenzen der Zwei und der Drei beschriebenen Intervalle erhalten:

Intervall	Centmaß	5 Teile		12 Teile		41 Teile		53 Teile	
S ($2^8/3^5$)	***90,224996***	$2^{0/5}$	*0,00*	$2^{1/12}$	*100,00*	$2^{3/41}$	*87,804878*	$2^{4/53}$	*90,566038*
A ($3^7/2^{11}$)	***113,685006***					$2^{4/41}$	*117,073171*	$2^{5/53}$	*113,207547*
S^2 ($2^{16}/3^{10}$)	***180,449991***			$2^{2/12}$	*200,00*	$2^{6/41}$	*175,609756*	$2^{8/53}$	*181,132076*
T ($3^2/2^3$)	***203,910002***	$2^{1/5}$	*240,00*			$2^{7/41}$	*204,878049*	$2^{9/53}$	*203,773585*
k3$_1$ ($2^5/3^3$)	***294,134997***			$2^{3/12}$	*300,00*	$2^{10/41}$	*292,682927*	$2^{13/53}$	*294,339623*
k3$_2$ ($3^9/2^{14}$)	***317,590078***					$2^{11/41}$	*321,951220*	$2^{14/53}$	*316,981132*
g3$_1$ ($2^{13}/3^8$)	***384,359993***			$2^{4/12}$	*400,00*	$2^{13/41}$	*380,487805*	$2^{17/53}$	*384,905660*
g3$_2$ ($3^4/2^6$)	***407,820003***	$2^{2/5}$	*480,00*			$2^{14/41}$	*409,756098*	$2^{18/53}$	*407,547170*
Qua ($2^2/3$)	***498,044999***			$2^{5/12}$	*500,00*	$2^{17/41}$	*497,560976*	$2^{22/53}$	*498,113208*
Tr$_1$ ($2^{10}/3^6$)	***588,269995***			$2^{6/12}$	*600,00*	$2^{20/41}$	*585,365854*	$2^{26/53}$	*588,679245*
Tr$_2$ ($3^6/2^9$)	***611,730005***					$2^{21/41}$	*614,634146*	$2^{27/53}$	*611,320755*
Qui (3/2)	***701,955001***	$2^{3/5}$	*720,00*	$2^{7/12}$	*700,00*	$2^{24/41}$	*702,439024*	$2^{31/53}$	*701,886793*
k6$_1$ ($2^7/3^4$)	***792,179997***			$2^{8/12}$	*800,00*	$2^{27/41}$	*790,243903*	$2^{35/53}$	*792,452830*
k6$_2$ ($3^8/2^{12}$)	***815,640007***					$2^{28/41}$	*819,512195*	$2^{36/53}$	*815,094340*
g6$_1$ ($2^{15}/3^9$)	***882,404992***	$2^{4/5}$	*960,00*	$2^{9/12}$	*900,00*	$2^{30/41}$	*878,048781*	$2^{39/53}$	*883,018868*
g6$_2$ ($3^3/2^4$)	***905,865003***					$2^{31/41}$	*907,317073*	$2^{40/53}$	*905,660377*
k7$_1$ ($2^4/3^2$)	***996,089998***			$2^{10/12}$	*1000,00*	$2^{34/41}$	*995,121951*	$2^{44/53}$	*996,226416*
k7$_2$ ($3^{10}/2^{15}$)	***1019,550009***	$2^{5/5}$	*1200,00*			$2^{35/41}$	*1024,39024*	$2^{45/53}$	*1018,867925*
g7$_1$ ($2^{12}/3^7$)	***1086,314994***			$2^{11/12}$	*1100,00*	$2^{37/41}$	*1082,92683*	$2^{48/53}$	*1086,792453*
g7$_2$ ($3^5/2^7$)	***1109,775004***					$2^{38/41}$	*1112,19512*	$2^{49/53}$	*1109,433962*
O (2)	***1200,000000***			$2^{12/12}$	*1200,00*	$2^{41/41}$	*1200,00000*	$2^{53/53}$	*1200,000000*

VII. Intervalle, die man durch Potenzen von 2 und 3 und durch den Faktor 5 beschreiben kann

Wenn man auch den **5. Teilton der Obertonreihe** berücksichtigt (**F**, **2F**, **3F**, **4F**, **5F**), erhält man Intervalle, deren Frequenzverhältnisse neben Potenzen der 2 und der 3 auch noch den Faktor **5** enthalten:

kleiner Halbton	135/128	[135/128] =	*92,1787165*
großer Halbton	16/15	[16/15] =	*111,7312853*
kleiner Ganzton	10/9	[10/9] =	*182,4037121*
kleine Terz	6/5	[6/5] =	*315,6412870*
große Terz	5/4	[5/4] =	*386,3137139*
Tritonus	45/32	[45/32] =	*590,2237156*
Tritonus	64/45	[64/45] =	*609,7762844*
kleine Sext	8/5	[8/5] =	*813,6862861*
große Sext	5/3	[5/3] =	*884,3587130*
kleine Septim	9/5	[9/5] =	*1017,5962879*
große Septim	15/8	[15/8] =	*1088,2687147*
große Septim	256/135	[256/135] =	*1107,8212835*

Diese Intervalle kann man gut durch Hinzunahme des **Syntonischen Kommas Ψ** (Verhältnis zwischen den Terzen 81/64 und 5/4) oder des **Schismas X** (Verhältnis zwischen Pythagoräischem und Syntonischem Komma) darstellen.

$\Psi = (81/64)/(5/4) = 3^4/(2^4 \cdot 5) = 81/80$ $\qquad [\Psi] = \psi = 21{,}5062896$

$X = P/\Psi = (3^8 \cdot 5)/2^{15}$ $\qquad [X] = x = [P] - [\Psi] = p - \psi = 1{,}9537208$

Die Rechnung liefert folgende Ergebnisse:

kleiner Halbton	$135/128 = P^5/(\Psi R) = (P^4 X)/R$	[135/128] =	$4p - r + x$
großer Halbton	$16/15 = (P^4\Psi)/R = P^5/(RX)$	[16/15] =	$5p - r - x$
kleiner Ganzton	$10/9 = P^9/(\Psi R^2) = P^8(X/R^2)$	[10/9] =	$8p - 2r + x$
kleine Terz	$6/5 = (P^{13}\Psi)/R^3 = P^{14}/(R^3 X)$	[6/5] =	$14p - 3r - x$
große Terz	$5/4 = P^{18}/(\Psi R^4) = (P^{17}X)/R^4$	[5/4] =	$17p - 4r + x$
Tritonus	$45/32 = P^{27}/(\Psi R^6) = (P^{26}X)/R^6$	[45/32] =	$26p - 6r + x$
Tritonus	$64/45 = (P^{26}\Psi)/R^6 = P^{27}/(R^6 X)$	[64/45] =	$27p - 6r - x$
kleine Sext	$8/5 = P^{35}/(\Psi R^8) = P^{36}/(R^8 X)$	[8/5] =	$36p - 8r - x$
große Sext	$5/3 = P^{40}/(\Psi R^9) = (P^{39}X)/R^9$	[5/3] =	$39p - 9r + x$
kleine Septim	$9/5 = (P^{44}\Psi)/R^{10} = P^{45}/(R^{10}X)$	[9/5] =	$45p - 10r - x$
große Septim	$15/8 = P^{49}/(\Psi R^{11}) = (P^{48}X)/R^{11}$	[15/8] =	$48p - 11r + x$
große Septim	$256/135 = (P^{48}\Psi)/R^{11} = P^{49}/(R^{11}X)$	[256/135] =	$49p - 11r - x$

Aus dem Vorigen und den **<u>Kapiteln V und VI</u>**

folgt $[5/4] = 17p - 4r + x$
$= 17h - 8r/53 + x$
$= 17h - 0{,}5456673 + 1{,}9537208 =$
$\mathbf{= 17h + 1{,}4080535}$ **¢**

Die große Terz als Intervall zwischen dem 4. und 5. Teilton der Obertonreihe kann also durch 17 Holder-Kommata sehr gut angenähert werden.

Analog ergibt sich für die anderen Intervalle, die das Syntonische Komma bzw. das Schisma enthalten:

$135/128 = (P^4X)/R$	[135/128] =	$4h - 5r/53 + x =$	$4h$ **+ 1,6126787**
$16/15 = P^5/(RX)$	[16/15] =	$5h + 3r/53 - x =$	$5h$ **– 1,7490956**
$10/9 = (P^8X)/R^2$	[10/9] =	$8h - 10r/53 + x =$	$8h$ **+ 1,2716367**
$6/5 = P^{14}/(R^3X)$	[6/5] =	$14h + 5r/53 - x =$	$14h$ **– 1,6126787**
$5/4 = (P^{17}X)/R^4$	[5/4] =	$17h - 8r/53 + x =$	$17h$ **+ 1,4080535**
$45/32 = (P^{26}X)/R^6$	[45/32] =	$26h - 6r/53 + x =$	$26h$ **+ 1,5444703**
$64/45 = P^{27}/(R^6X)$	[64/45] =	$27h + 6r/53 - x =$	$27h$ **– 1,5444703**
$8/5 = P^{36}/(R^8X)$	[8/5] =	$36h + 8r/53 - x =$	$36h$ **– 1,4080535**
$5/3 = (P^{39}X)/R^9$	[5/3] =	$39h - 5r/53 + x =$	$39h$ **+ 1,6126787**
$9/5 = P^{45}/(R^{10}X)$	[9/5] =	$45h + 10r/53 - x =$	$45h$ **– 1,2716367**
$15/8 = (P^{48}X)/R^{11}$	[15/8] =	$48h - 3r/53 + x =$	$48h$ **+ 1,7490956**
$256/135 = P^{49}/(R^{11}X)$	[256/135] =	$49h + 5r/53 - x =$	$49h$ **– 1,6126787**

Auch diese Intervalle können also sehr günstig durch Holder-Kommata angenähert werden.

Zum Vergleich die Annäherung durch die Teilung der Oktav in 12 gleiche Teile:

kleiner Halbton 135/128	[135/128] =	*92,1787165 =*	*100* ***– 7,8212235***
großer Halbton 16/15	[16/15] =	*111,7312853 =*	*100* ***+ 11,7312853***
kleiner Ganzton 10/9	[10/9] =	*182,4037121 =*	*200* ***– 17,5962849***
kleine Terz 6/5	[6/5] =	*315,6412870 =*	*300* ***+ 15,6412870***
große Terz 5/4	[5/4] =	*386,3137139 =*	*400* ***– 13,6862861***
Tritonus 45/32	[45/32] =	*590,2237156 =*	*600* ***– 9,7762844***
Tritonus 64/45	[64/45] =	*609,7762844 =*	*600* ***+ 9,7762844***
kleine Sext 8/5	[8/5] =	*813,6862861 =*	*800* ***+ 13,6862861***
große Sext 5/3	[5/3] =	*884,3587130 =*	*900* ***– 15,6412870***
kleine Septim 9/5	[9/5] =	*1017,5962879 =*	*1000* ***+ 17,5962879***
große Septim 15/8	[15/8] =	*1088,2687147 =*	*1100* ***– 11,7312853***
große Septim 256/135	[256/135] =	*1107,8212835 =*	*1100* ***+ 7,8212835***

VIII. Intervalle, die man durch Potenzen von 2 und 3 und durch den Faktor 7 beschreiben kann

Wenn man auch den **7. Teilton der Obertonreihe** (**F, 2F, 3F, 4F, 5F, 6F, 7F**) berücksichtigt, ergeben sich noch weitere Intervalle:

8/7	[8/7] =	*231,1740935*
7/6	[7/6] =	*266,8709056*
9/7	[9/7] =	*435,0840953*
21/16	[21/16] =	*470,7809073*
32/21	[32/21] =	*729,2190927*
14/9	[14/9] =	*764,9159047*
12/7	[12/7] =	*933,1290944*
7/4	[7/4] =	*968,8259065*

Nimmt man

„7er-Komma" **$\Phi = 2^6/(7\cdot3^2) = 64/63$** $[\Phi] = \varphi = 27{,}2640918$
(Verhältnis zwischen Tonus 9/8 und dem Intervall 8/7)

und „7er-Schisma" **$\Upsilon = \Phi/P = 2^{25}/(7\cdot3^{14})$** $[\Upsilon] = y = 3{,}8048148$
(Verhältnis zwischen Pythagoräischem und 7er-Komma)

erhält man:

8/7	$= (P^9\Phi)/R^2$	$= (P^{10}\Upsilon)/R^2$	[8/7] =	$10p - 2r + y$
7/6	$= P^{13}/(\Phi R^3)$	$= P^{12}/(R^3\Upsilon)$	[7/6] =	$12p - 3r - y$
9/7	$= (P^{18}\Phi)/R^4$	$= (P^{19}\Upsilon)/R^4$	[9/7] =	$19p - 4r + y$
21/16	$= P^{22}/(\Phi R^5)$	$= P^{21}/(R^5\Upsilon)$	[21/16] =	$21p - 5r - y$
32/21	$= (P^{31}\Phi)/R^7$	$= (P^{32}\Upsilon)/R^7$	[32/21] =	$32p - 7r + y$
14/9	$= P^{35}/(\Phi R^8)$	$= P^{34}/(R^8\Upsilon)$	[14/9] =	$34p - 8r - y$
12/7	$= (P^{40}\Phi)/R^9$	$= (P^{41}\Upsilon)/R^9$	[12/7] =	$41p - 9r + y$
7/4	$= P^{44}/(\Phi R^{10})$	$= P^{43}/(R^{10}\Upsilon)$	[7/4] =	$43p - 10r - y$

Durch Potenzen der 2 und der 3 könnten die folgenden passenden Intervalle dargestellt werden:

sehr großer Ganzton	$A^2 = 3^{14}/2^{22} = P^{10}/R^2$	$[A^2]$ =	$10p - 2r$ =	$10h + 14r/53$
sehr kleine Terz	$S^3 = 2^{24}/3^{15} = P^{12}/R^3$	$[S^3]$ =	$12p - 3r$ =	$12h - 15r/53$
sehr große Terz	$T\cdot A^2 = 3^{16}/2^{25} = P^{19}/R^4$	$[T\cdot A^2]$ =	$19p - 4r$ =	$19h + 16r/53$
sehr große Terz	$T\cdot S^3 = 2^{21}/3^{13} = P^{21}/R^5$	$[T\cdot S^3]$ =	$21p - 5r$ =	$21h - 13r/53$
große Quint	$Qua\cdot A^2 = 3^{13}/2^{20} = P^{32}/R^7$	$[Qua\cdot A^2]$ =	$32p - 7r$ =	$32h + 13r/53$
sehr kleine Sext	$Qua\cdot S^3 = 2^{26}/3^{16} = P^{34}/R^8$	$[Qua\cdot S^3]$ =	$34p - 8r$ =	$34h - 16r/53$
sehr große Sext	$Qui\cdot A^2 = 3^{15}/2^{23} = P^{41}/R^9$	$[Qui\cdot A^2]$ =	$41p - 9r$ =	$41h + 15r/53$
sehr kleine Septim	$Qui\cdot S^3 = 2^{23}/3^{14} = P^{43}/R^{10}$	$[Qui\cdot S^3]$ =	$43p - 10r$ =	$43h - 14r/53$

also erhält man:

8/7	$= (P^{10}Y)/R^2$	$[8/7] = 10p - 2r + y = 10h + 14r/53 + y = 10h$ **+ 4,759733**
7/6	$= P^{12}/(R^3Y)$	$[7/6] = 12p - 3r - y = 12h - 15r/53 - y = 12h$ **– 4,827941**
9/7	$= (P^{19}Y)/R^4$	$[9/7] = 19p - 4r + y = 19h + 16r/53 + y = 19h$ **+ 4,896149**
21/16	$= P^{21}/(R^5Y)$	$[21/16] = 21p - 5r - y = 21h - 13r/53 - y = 21h$ **– 4,691524**
32/21	$= (P^{32}Y)/R^7$	$[32/21] = 32p - 7r + y = 32h + 13r/53 + y = 32h$ **+ 4,691524**
14/9	$= P^{34}/(R^8Y)$	$[14/9] = 34p - 8r - y = 34h - 16r/53 - y = 34h$ **– 4,896149**
12/7	$= (P^{41}Y)/R^9$	$[12/7] = 41p - 9r + y = 41h + 15r/53 + y = 41h$ **+ 4,827941**
7/4	$= P^{43}/(R^{10}Y)$	$[7/4] = 43p - 10r - y = 43h - 14r/53 - y = 43h$ **– 4,759733**

Guido von Arezzo erwähnt im „Micrologus“ übrigens auch die Diësis, die Mitte eines Semitoniums, die man z.B. zwischen **e** und **f** finden kann, indem man von **d** das Saitenlängenverhältnis 6/7 misst, das entspricht einem Frequenzverhältnis von 7/6.

IX. Beispiel Makam-Musik

In der osmanischen **Makam-Musik-Theorie** wird die Oktav in 53 Teile geteilt.
Diese werden „Koma“ oder „Fazia“ genannt und als Pythagoräische Kommata bezeichnet.
(http://www.makamhane.com/makam/makamtheorie.pdf)

Die obigen Bildungsmöglichkeiten für Intervalle können gemeinsam verwendet werden.
Da die bildenden Kommata ähnlich groß und die Schismata daher klein sind, passen die entstehenden Intervalle gut zusammen.

Folgende Intervalle treten zwischen den Tönen der gebildeten Skalen auf:

Fazia, Koma	**1*h***	$\approx [\mathbf{3^{12}/2^{19}}] \approx [\mathbf{74/73}]$	$\approx [3^4/(5\cdot2^4)]=[81/80]$	$\approx [2^6/(7\cdot3^2)]=[64/63]$
Eksik Bakiyye	**3*h***	$\approx [3^{36}/2^{57}] \approx [\mathbf{2^{27}/3^{17}}]$	$\approx [\mathbf{5^2/(3\cdot2^3)}]=[\mathbf{25/24}]$	$\approx [(7\cdot2^2)/3^3]$
Bakiyye	**4*h***	$\approx [\mathbf{2^8/3^5}]$	$\approx [(5\cdot3^3)/2^7]=[135/128] \approx$	$[(7\cdot3^9)/2^{17}]$
Küçük Mücennep	**5*h***	$\approx [\mathbf{3^7/2^{11}}]$	$\approx [2^4/(5\cdot3)]=[16/15]$	$\approx [2^{14}/(7\cdot3^{7)}]$
Büyük Mücennep	**8*h***	$\approx [\mathbf{2^{16}/3^{10}}]$	$\approx [(5\cdot2)/3^2]=[10/9]$	$\approx [(7\cdot3^4)/2^9]$
Tanînî	**9*h***	$\approx [\mathbf{3^2/2^3}]$	$\approx [2^{12}/(5\cdot3^6)]$	$\approx [2^{22}/(7\cdot3^{12})]$
Artik ikili 12	**12*h***	$\approx [2^{24}/3^{15}]$	$\approx [(5\cdot2^9)/3^7]$	$\approx [7/(2\cdot3)]=[\mathbf{7/6}]$
Artik ikili 13	**13*h***	$\approx [\mathbf{2^5/3^4}]$	$\approx [(5\cdot3^5)/2^{10}]$	$\approx [(7\cdot3^{11})/2^{20}]$

Der Wert von 25/24 für 3 Kommata ergibt sich aus dem Quotienten der großen Terz mit dem Verhältnis 5/4 (17 Kommata) zur kleinen mit dem Verhältnis 6/5 (14 Kommata).

Und da $R = 3^{53}/2^{84} \approx 1$ ist $P^3 = 3^{36}/2^{57} \approx P^3/R = 2^{27}/3^{17}$.

Diese Intervalle und die Töne einer Oktav vom Grundton Râst bis Gerdaniye werden in der folgenden Tabelle auch mit Hilfe der Holder-Kommata dargestellt:

Râst		0	*00,0*		*00,0*		*00,0*		*00,0*
	Fazia, Koma	1	*22,6*	$3^{12}/2^{19}$	*23,5*	81/80	*21,5*	64/63	*27,3*
		2	*45,3*						
	Eksik Bakiyye	3	*67,9*	$2^{27}/3^{17}$	*66,8*	25/24	*70,7*		
Nîm Zirgûle	Bakiyye	4	*90,6*	$2^{8}/3^{5}$	*90,2*	135/128	*92,2*		
Zirgûle	Küçük mücennep	5	*113,2*	$3^{7}/2^{11}$	*113,7*	16/15	*111,7*		
		6	*135,8*						
		7	*158,5*						
Dik Zirgûle	Büyük mücennep	8	*181,1*	$2^{16}/3^{10}$	*180,4*	10/9	*182,4*		
Dügâh	Tanînî	9	*203,8*	$3^{2}/2^{3}$	*203,9*				
		10	*226,4*					8/7	*231,2*
		11	*249,1*						
	Artik ikili	12	*276,7*	$2^{24}/3^{15}$	*270,7*			7/6	*266,9*
Kürdî	Artik ikili	13	*294,3*	$2^{5}/3^{3}$	*294,1*				
Dik kürdî		14	*317,0*	$3^{9}/2^{14}$	*317,6*	6/5	*315,6*		
		15	*339,6*						
		16	*362,3*						
Segâh		17	*384,9*	$2^{13}/3^{8}$	*384,4*	5/4	*386,3*		
Bûselik		18	*407,5*	$3^{4}/2^{6}$	*407,8*				
		19	*430,2*					9/7	*435,1*
		20	*452,8*						
		21	*475,5*					21/16	*470,8*
Çârgâh		22	*498,1*	$2^{2}/3$	*498,0*				
		23	*520,8*						
		24	*543,4*						
		25	*566,0*						
Nim hicâz		26	*588,7*	$2^{10}/3^{6}$	*588,3*	45/32	*590,2*		
Hicaz		27	*611,3*	$3^{6}/2^{9}$	*611,7*	64/45	*609,8*		
		28	*634,0*						
		29	*656,6*						
Dik hicâz		30	*679,2*	$2^{18}/3^{11}$	*678,5*				
Nevâ		31	*701,9*	3/2	*702,0*				
		32	*724,5*					32/21	*729,2*
		33	*747,2*						

		34	*769,8*					14/9	*764,9*
Nîm hisâr		35	*792,5*	$2^7/3^4$	*792,2*				
Hisâr		36	*815,1*	$3^8/2^{12}$	*815,6*	8/5	*813,7*		
		37	*837,7*						
		38	*860,4*						
Dik hisâr		39	*883,0*	$2^{15}/3^9$	*882,4*	5/3	*884,4*		
Hüseynî		40	*905,7*	$3^3/2^4$	*905,9*				
		41	*928,3*					12/7	*933,1*
		42	*950,9*						
		43	*973,6*					7/4	*968,8*
Acem		44	*996,2*	$2^4/3^2$	*996,1*				
Dik acem		45	*1018,9*	$3^{10}/2^{15}$	*1019,6*	9/5	*1017,6*		
		46	*1041,5*						
		47	*1064,2*						
Evç		48	*1086,8*	$2^{12}/3^7$	*1086,3*	15/8	*1088,3*		
Mâhûr		49	*1109,4*	$3^5/2^7$	*1109,8*	256/135	*1107,8*		
		50	*1132,1*						
		51	*1154,7*						
Dik mâhûr		52	*1177,4*	$2^{20}/3^{12}$	*1176,5*				
Gerdâniye		53	*1200,0*	2	*1200,0*	2	*1200,0*	2	*1200,0*

X. Beispiel Raga-Musik

Auch die **Shrutis** der indischen **Ragas** könnten gut mit Hilfe der Holder-Kommata dargestellt werden.

Folgende Tabelle ist nach Ueli Raz (https://www.ueliraz.ch/Sitar/DrittesKapitel.htm) zusasmmengestellt:

Chhandovati	0	00,0		00,0		00,0
	1	22,6			81/80	21,5
	2	45,3				
	3	67,9			25/24	70,7
Dayavati	4	90,6	$2^8/3^5$	90,2		
	5	113,2			16/15	111,7
Ranjani	6	135,8			27/25	133,2
	7	158,5				
	8	181,1			10/9	182,4
Ratika	9	203,8	$3^2/2^3$	203,9		
Raudri	10	226,4			256/225	223,5
	11	249,1				
	12	276,7			75/64	274,6
Krodha	13	294,3	$2^5/3^3$	294,1		
Varjrika	14	317,0			6/5	315,6
	15	339,6				
	16	362,3				
Prasarini	17	384,9			5/4	386,3
Pritih	18	407,5	$3^4/2^6$	407,8		
	19	430,2				
	20	452,8				
	21	475,5			320/243	476,5
Marjani	22	498,1	$2^2/3$	498,0		
	23	520,8			27/20	519,6
	24	543,4				
Kshitih	25	566,0			25/18	568,7
	26	588,7			45/32	590,2
Rakta	27	611,3			64/45	609,8
Sandipani	28	634,0			36/25	631,3
	29	656,6				

	30	*679,2*			40/27	*680,4*
Alapini	31	*701,9*	3/2	*702,0*		
	32	*724,5*			243/160	*723,5*
	33	*747,2*				
Madanti	34	*769,8*			25/16	*772,6*
Rohini	35	*792,5*	$2^7/3^4$	*792,2*		
	36	*815,1*			8/5	*813,7*
	37	*837,7*				
	38	*860,4*			400/243	*862,9*
Ramya	39	*883,0*			5/3	*884,4*
Ugra	40	*905,7*	$3^3/2^4$	*905,9*		
	41	*928,3*			128/75	*925,4*
	42	*950,9*				
	43	*973,6*			225/128	*976,5*
Kshobhini	44	*996,2*	$2^4/3^2$	*996,1*		
Tivra	45	*1018,9*			9/5	*1017,6*
	46	*1041,5*			729/400	*1039,1*
	47	*1064,2*			50/27	*1066,8*
Kumudvati	48	*1086,8*			15/8	*1088,3*
Manda	49	*1109,4*	$3^5/2^7$	*1109,8*		
	50	*1132,1*			48/25	*1129,3*
	51	*1154,7*				
	52	*1177,4*			160/81	*1178,5*
Chhandovati	53	*1200,0*	2	*1200,0*	2	*1200,0*

XI. Intervalle mit den Faktoren 5 und 7

Zwischen dem 5. und dem 7. Teilton der Obertonreihe bzw. zwischen dem 7. Teilton und dem um eine Oktav hinauftransponierten 5. Teilton ergeben sich zwei weitere Tritoni:

7/5	[5/7] = *582,5121926*
10/7	[10/7] = *617,4878074*

Durch Hinzufügen eines Tonus erhält man zwei kleine Sexten:

63/40	[63/40] = *786,4221943*
45/28	[45/28] = *821,3978091*

Durch Wegnehmen eines Tonus (9/8) erhält man zwei große Terzen:

56/45	[56/45] = *378,6021909*
80/63	[80/63] = *413,5778057*

Zu Quart bzw. Quint ergeben sich zwei Halbtöne:

21/20	[21/20] = *84,4671935*
15/14	[15/14] = *119,4428083*

Als deren Komplementärintervalle zur Oktav ergeben sich zwei große Septimen:

28/15	[28/15] = *1080,5571917*
40/21	[40/21] = *1115,5328065*

Nimmt man

$$Z := \Phi/\Psi = X \cdot Y = (5 \cdot 2^{10})/(7 \cdot 3^{6}) \qquad [Z] = z = x + y = 5{,}7578022$$

kann man die Annäherung dieser Intervalle durch Pythagoräische Kommata folgendermaßen beschreiben:

$21/20 = P^{4}/(R \cdot Z)$	$[21/20] = 4p - r - z$
$15/14 = (P^{5} \cdot Z)/R$	$[15/14] = 5p - r + z$
$56/45 = P^{17}/(R^{4} \cdot Z)$	$[56/45] = 17p - 4r - z$
$80/63 = (P^{18} \cdot Z)/R^{4}$	$[80/63] = 18p - 4r + z$
$7/5 = P^{26}/(R^{6} \cdot Z)$	$[7/5] = 26p - 6r - z$
$10/7 = (P^{27} \cdot Z)/R^{6}$	$[10/7] = 27p - 6r + z$
$63/40 = P^{35}/(R^{8} \cdot Z)$	$[63/40] = 35p - 8r - z$
$45/28 = (P^{36} \cdot Z)/R^{8}$	$[45/28] = 36p - 8r + z$
$28/15 = P^{48}/(R^{11} \cdot Z)$	$[28/15] = 48p - 11r - z$
$40/21 = (P^{49} \cdot Z)/R^{11}$	$[40/21] = 49p - 11r + z$

und mit den Resultaten von **Kapitel V und VI** erhalten wir:

$[21/20] = 4p - r - z$	$= 4h - 5r/53 - z$	$= 4h$ **– 6,0988443**
$[15/14] = 5p - r + z$	$= 5h + 7r/53 + z$	$= 5h$ **+ 6,2352611**
$[56/45] = 17p - 4r - z$	$= 17h - 8r/53 - z$	$= 17$h **– 6,3034695**
$[80/63] = 18p - 4r + z$	$= 18h + 4r/53 + z$	$= 18h$ **+ 6,0306358**
$[7/5] = 26p - 6r - z$	$= 26h - 6r/53 - z$	$= 26$h **– 6,1670527**
$[10/7] = 27p - 6r + z$	$= 27h + 6r/53 + z$	$= 27h$ **+ 6,1670527**
$[63/40] = 35p - 8r - z$	$= 35h - 4r/53 - z$	$= 35h$ **– 6,0306358**
$[45/28] = 36p - 8r + z$	$= 36h + 8r/53 + z$	$= 36h$ **+ 6,3034695**
$[28/15] = 48p - 11r - z$	$= 48h - 7r/53 - z$	$= 48h$ **– 6,2352611**
$[40/21] = 49p - 11r + z$	$= 49h + 5r/53 + z$	$= 49h$ **+ 6,0988443**

XII. Liste der besprochenen Intervalle

In dieser Zusammenstellung wurden (abgesehen von den gleichstufigen Temperaturen) folgende Intervalle besprochen:

$R^{1/53} = 3/2^{84/53}$	$= O^{1/17593,1378}$	$[R^{1/53}] = r/53$	$= 0,06820841$
$R^{10/53} = 3^{10}/2^{840/53}$	$= O^{1/1759,3137}$	$[R^{10/53}] = 10r/53$	$= 0,6820841$
$R^{16/53} = 3^{16}/2^{1344/53}$	$= O^{1/1099,5711}$	$[R^{16/53}] = 16r/53$	$= 1,0913346$
$X = P/\Psi = (3^8{\cdot}5)/2^{15}$	$= O^{1/614,2126}$	$[X] = x$	$= 1,9537208$
$R = 3^{53}/2^{84}$	$= O^{1/331,9460}$	$[R] = r$	$= 3,6150459$
$Y = \Phi/P = 2^{25}/(7{\cdot}3^{14})$	$= O^{1/315,3899}$	$[Y] = y$	$= 3,8048148$
$Z = \Phi/\Psi = X{\cdot}Y = (5{\cdot}2^{10})/(7{\cdot}3^6)$	$= O^{1/208,4129}$	$[Z] = z$	$= 5,7578022$

$Q^{-1} = 2^{65}/3^{41}$	$= O^{1/60,4687}$	$[Q^{-1}]$	$= 19,8449645$
$\Psi = (9/8)^2{:}(5/4) = 3^4/(2^4{\cdot}5)$	$= O^{1/55,7976}$	$[\Psi] = \psi$	$= 21,5062896$
$H = 2^{1/53}$	$= O^{1/53}$	$[H] = h$	$= 22,6415094$
$P = 3^{12}/2^{19}$	$= O^{1/51,1509}$	$[P] = p$	$= 23,4600104$
$\Phi = (8/7){:}(9/8) = 2^6/(7{\cdot}3^2)$	$= O^{1/44,0139}$	$[\Phi] = \varphi$	$= 27,2640918$
$2^{1/41}$	$= O^{1/41}$	$[2^{1/41}]$	$= 29,2682927$

25/24	$= O^{1/16,9797}$	[25/24]	= *70,6724269*
21/20	$= O^{1/14,2067}$	[21/20]	= *84,4671935*
$S = 2^8/3^5$	$= O^{1/13,3001}$	[S] = *s*	= *90,2249957*
135/128	$= O^{1/13,0182}$	[135/128]	= *92,1787165*
$2^{1/12}$	$= O^{1/12}$	[$2^{1/12}$]	= *100,0000000*
16/15	$= O^{1/10,7401}$	[16/15]	= *111,7312853*
$A = 3^7/2^{11}$	$= O^{1/10,5555}$	[A]	= *113,6850061*
15/14	$= O^{1/10,0466}$	[15/14]	= *119,4428083*
27/25	$= O^{1/9,0065}$	[27/25]	= *133,2375749*

$S^2 = 2^{16}/3^{10}$	$= O^{1/6,6500}$	[S^2]	= *180,4499913*
10/9	$= O^{1/6,5788}$	[10/9]	= *182,4037121*
$T = 9/8 = 3^2/2^3$	$= O^{1/5,8849}$	[T]= *t*	= *203,9100017*
256/225	$= O^{1/5,3700}$	[256/225]	= *223,4625705*
8/7	$= O^{1/5,1909}$	[8/7]	= *231,1740935*
$2^{1/5}$	$= O^{1/5}$	[$2^{1/5}$]	= *240,0000000*

7/6	$= O^{1/4,4966}$	[7/6]	= *266,8709056*
75/64	$= O^{1/4,3703}$	[75/64]	= *274,5824286*
$32/27 = 2^5/3^3$	$= O^{1/4,0798}$	[$2^5/3^3$]	= *294,1349974*
6/5	$= O^{1/3,8018}$	[6/5]	= *315,6412870*
$3^9/2^{14}$	$= O^{1/3,7784}$	[$3^9/2^{14}$]	= *317,5950078*

56/45	$= O^{1/3,1696}$	[56/45]	= *378,6021909*
$2^{13}/3^8$	$= O^{1/3,1221}$	[$2^{13}/3^8$]	= *384,3599931*
5/4	$= O^{1/3,1063}$	[5/4]	= *386,3137139*
$T^2 = 81/64 = 3^4/2^6$	$= O^{1/2,9425}$	[T^2]	= *407,8200035*
80/63	$= O^{1/2,9015}$	[80/63]	= *413,5778057*
9/7	$= O^{1/2,7581}$	[9/7]	= *435,0840953*

21/16	$= O^{1/2,5490}$	[21/16]	= *470,7809073*
$Qua = 4/3 = 2^2/3$	$= O^{1/2,4094}$	[Qua]	= *498,0449991*
27/20	$= O^{1/2,3097}$	[27/20]	= *519,5512887*

25/18	$= O^{1/2,1100}$	[25/18]	= *568,7174260*
7/5	$= O^{1/2,0600}$	[7/5]	= *582,5121926*
$1024/729 = 2^{10}/3^6$	$= O^{1/2,0399}$	[$2^{10}/3^6$]	= *588,2699948*
45/32	$= O^{1/2,0331}$	[45/32]	= *590,2237156*
64/45	$= O^{1/1,9679}$	[64/45]	= *609,7762844*
$729/512 = 3^6/2^9$	$= O^{1/1,9616}$	[$3^6/2^9$]	= *611,7300052*
10/7	$= O^{1/1,9434}$	[10/7]	= *617,4878074*
36/25	$= O^{1/1,9009}$	[36/25]	= *631,2825740*

$2^{18}/3^{11}$	$= O^{1/1,7686}$	$[2^{18}/3^{11}]$	= *678,4949905*
40/27	$= O^{1/1,7635}$	[40/27]	= *680,4487113*
Qui = 3/2	$= O^{1/1,7095}$	[Qui]	= *701,9550009*
243/160	$= O^{1/1,6587}$	[243/160]	= *723,4612905*
32/21	$= O^{1/1,6456}$	[32/21]	= *729,2190927*

14/9	$= O^{1/1,5688}$	[14/9]	= *764,9159047*
25/16	$= O^{1/1,5531}$	[25/16]	= *772,6274277*
63/40	$= O^{1/1,5259}$	[63/40]	= *786,4221943*
$128/81 = 2^7/3^4$	$= O^{1/1,5148}$	[128/81]	= *792,1799965*
8/5	$= O^{1/1,4748}$	[8/5]	= *813,6862861*
45/28	$= O^{1/1,4609}$	[45/28]	= *821,3978091*
$3^8/2^{12}$	$= O^{1/1,4712}$	$[3^8/2^{12}]$	= *825,6400069*

400/243	$= O^{1/1,3907}$	[400/243]	= *862,8524234*
$2^{15}/3^9$	$= O^{1/1,3599}$	$[2^{15}/3^9]$	= *882,4049922*
5/3	$= O^{1/1,3569}$	[5/3]	= *884,3587130*
$27/16 = 3^3/2^4$	$= O^{1/1,3247}$	$[3^3/2^4]$	= *905,8650026*
128/75	$= O^{1/1,2967}$	[128/75]	= *925,4175714*
12/7	$= O^{1/1,2860}$	[12/7]	= *933,1290944*

7/4	$= O^{1/1,2386}$	[7/4]	= *968,8259065*
225/128	$= O^{1/1,2288}$	[225/128]	= *976,5374295*
$16/9 = 2^4/3^2$	$= O^{1/1,2047}$	$[2^4/3^2]$	= *996,0899983*
9/5	$= O^{1/1,1792}$	[9/5]	= *1017,5962879*
$3^{10}/2^{15}$	$= O^{1/1,1770}$	$[3^{10}/2^{15}]$	= *1019,5500087*
729/400	$= O^{1/1,1548}$	[729/400]	= *1039,1025775*
50/27	$= O^{1/1,1249}$	[50/27]	= *1066,7624251*
28/15	$= O^{1/1,1105}$	[28/15]	= *1080,5571917*
$2^{12}/3^7$ =	$= O^{1/1,1047}$	$[2^{12}/3^7]$	= *1086,3149939*
15/8	$= O^{1/1,1027}$	[15/8]	= *1088,2687147*
256/135	$= O^{1/1,0832}$	[256/135]	= *1107,8212835*
$243/128 = 3^5/2^7$	$= O^{1/1,0819}$	$[3^5/2^7]$	= *1109,7750043*
40/21	$= O^{1/1,0757}$	[40/21]	= *1115,5328065*
48/25	$= O^{1/1,0626}$	[48/25]	= *1129,3275731*

$2^{20}/3^{12}$	$= O^{1/1,0199}$	$[2^{20}/3^{12}]$	= *1176,5399896*
160/81	$= O^{1/1,0182}$	[169/81]	= *1178,4937104*
O = 2	$= O^{1/1,0000}$	[O] = *o*	= *1200,0000000*

Lukas Thenius, 30.3.2022